ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, juillet 2009

PRÉNOM ET NOM : ________________________ NUMÉRO : ____________

Question 1

1. Calculez une primitive de
$$(x+2)\sqrt{x^2+4x}\ .$$
2. Calculez la limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^3}\ .$$
3. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote en $+\infty$, c'est-à-dire telle que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = 0$.
Précisez si chacune des cinq assertions suivantes est vraie ou fausse. Justifiez.
(A) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
(B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
(C) $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 0$
(D) Il existe $a \in [0, +\infty[$ tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq 5$
(E) Il existe $b \in [0, +\infty[$ tel que pour tout $x \in [b, +\infty[$, $f(x) \leq x$

PRÉNOM ET NOM : ________________________ NUMÉRO : __________

Question 2

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

1. Donnez le domaine de définition de f.
2. Calculez f' et f'' puis dressez un tableau des variations de f contenant
   (a) les racines et le signe de f', les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f,
   (b) les racines et le signe de f'', les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f.
3. Trouvez la pente de la tangente aux points où le graphe de f coupe l'axe Ox.
4. Tracez le graphe de f.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, juillet 2009

Prénom et nom : ________________________________ Numéro : ____________

Question 3

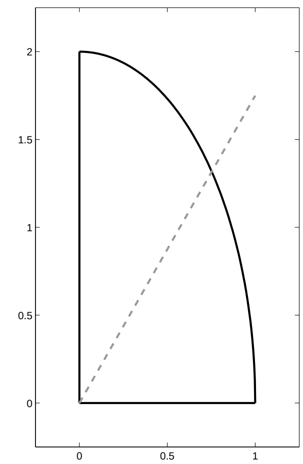
Pour leur goûter, Alfred et Amédée se partagent un quart de tarte d'une forme un peu particulière : il s'agit de la surface du plan délimitée par les axes Ox et Oy et la courbe d'équation $y = 2\sqrt{1-x^2}$. Comme ils sont d'une extrême politesse, ils souhaitent couper ce quart de tarte en deux morceaux de surfaces rigoureusement égales, à l'aide d'un seul coup de couteau passant par l'origine.

1. Calculez une primitive de la fonction $2\sqrt{1-x^2}$ en utilisant le changement de variable $x = \cos u$.

   Note : vous devez obtenir une expression égale, à une constante près, à $x\sqrt{1-x^2} - \arccos x$.

2. Calculez d'abord la surface totale du quart de tarte. Considérez ensuite le coup de couteau passant par l'origine correspondant à la droite d'équation $y = mx$. Calculez en fonction de m les surfaces de deux morceaux obtenus.

3. Calculez le coefficient angulaire m conduisant à deux parts de surfaces égales.



Prénom et nom : ____________________ Numéro : __________

Question 1

1. Calculez la limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + (\cos x) - 2(\cos 2x)}{(\sin x)^2} \ .$$
2. Calculez l'intégrale définie
$$\int_1^2 x^2 \ln x \ \mathrm{d}x \ .$$
3. (a) Soient a, b deux nombres réels et f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Démontrez que
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a + b - x)\mathrm{d}x \ .$$
   (b) Déduisez-en la valeur de
$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x \ .$$

Prénom et nom : ______________________________ Numéro : ____________

Question 2

1. Soit g la fonction définie par $g(t) = 2t + \ln t \quad (t \in]0, +\infty[)$.
   (a) Dressez le tableau des variations de g sur $]0, +\infty[$. En particulier, calculez $\lim_{t\to 0} g(t)$ et $\lim_{t\to +\infty} g(t)$.
   (b) Déduisez-en l'existence d'un nombre réel α strictement positif tel que $g(\alpha) = 0$.
   (c) Etudiez le signe de g.

   Note : pour la seconde partie de cette question, admettez que $\alpha = 0{,}42$.
2. Soit h la fonction définie par $h(t) = t^2 - t + t \ln t \quad (t \in]0, +\infty[)$.
   (a) Déterminez h' et dressez le tableau des variations de h sur $]0, +\infty[$. En particulier, calculez $\lim_{t\to 0} h(t)$ et $\lim_{t\to +\infty} h(t)$.
   (b) Déterminez une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-1} près.
   (c) Démontrez que l'équation $h(t) = 0$ admet une solution unique β, dont vous donnerez la valeur exacte.
   (d) Représentez le graphe de h dans un repère orthonormal.

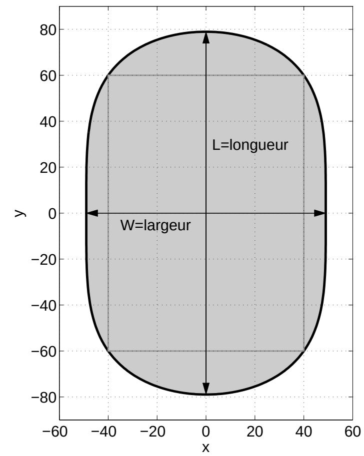
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 2, juillet 2009

Prénom et nom : ____ Numéro : _______________

Question 3

Le nouveau stade de Louvain-la-Neuve, représenté graphiquement ci-dessous, correspond à la surface du plan Oxy décrite par l'inégalité $y^4 \leq 3a^4 - 8b^2x^2$, où a et b sont deux paramètres positifs à déterminer. Les abscisses et les ordonnées sont mesurées en mètres.



1. Calculez en fonction des paramètres a et b les dimensions du stade le long des axes Ox et Oy (largeur W et longueur L). Quelles sont les unités des paramètres a et b ?
2. On considère un terrain de football rectangulaire dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy, symétrique par rapport à ces axes, et inscrit à l'intérieur du stade.

   Calculez quelle est la plus grande surface possible pour ce terrain, en fonction des paramètres a et b.
3. Déterminez les valeurs des paramètres a et b de façon à ce que le terrain optimal calculé au point précédent possède des dimensions réglementaires, à savoir une longueur de 120 mètres et une largeur de 80 mètres.

Prénom et nom : ______________________ Numéro : ____________

Question 1

1. Calculez l'intégrale définie
$$\int_{-1}^{1} x^2(2x^3+3)^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{d}x\ .$$
2. Calculez la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}\ .$$
3. Soient g une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a un nombre réel et f la fonction définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$f(x) = (x-a)g(x).$$
Démontrez rigoureusement que f est dérivable au point a, et déterminez $f'(a)$.

PRÉNOM ET NOM : ______________________________ NUMÉRO : ____________

Question 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.
   (a) Déterminez $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   (b) Déterminez f' et dressez le tableau des variations de f.
   (c) Démontrez que la droite $\Delta : y = -x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f lorsque x tend vers $-\infty$, et déterminez la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
   (d) Tracez la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.
   (a) Déterminez $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.
   (b) Calculez g'. En utilisant des résultats de la partie 1., déterminez le signe de g' et dressez le tableau des variations de g.
   (c) Déterminez les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et tracez $\mathscr{C}_g$.

Prénom et nom : ______________________________ Numéro : ____________

Question 3

On considère une bouée constituée d'un cylindre central auquel on a apposé à chaque extrémité un cône droit à base circulaire de même hauteur que le cylindre central. On note h la hauteur (en m) du cylindre et de chaque cône, et r le rayon (en m) des sections circulaires du cylindre et de la base de chaque cône. On cherche à concevoir une bouée la plus volumineuse possible.

1. Considérez tout d'abord un des deux cônes droits séparément : en le représentant comme un solide de révolution, démontrez à l'aide du calcul d'une intégrale que son volume est égal à $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
2. Calculez en fonction de r et h le volume total et la surface totale de la bouée, en sachant que la surface latérale du cône droit considéré au point précédent vaut $\pi r\sqrt{h^2 + r^2}$.
3. Une disposition réglementaire impose que la surface de la bouée soit égale à 2π mètres carrés. Déterminez alors les dimensions r et h correspondant à la bouée possédant le plus grand volume possible.

   Conseil : exprimez la hauteur h en fonction du rayon r.