

**Juillet 2006. Série 1.**

---

1. Soit l'équation en  $x$  où  $m$  est un paramètre réel.

$$x^4 - mx^2 + m = 0$$

Déterminer le nombre de racines réelles distinctes selon les valeurs de  $m$ .

-----

2. Résoudre dans les complexes, l'équation suivante :

$$z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 18z + 45 = 0$$

sachant que  $(1+2i)$  est une racine.

-----

3. Sous quelle condition sur les paramètres réels  $m$  et  $n$ , le système suivant en  $x$  et  $y$  réels admet-il une solution ?

$$\begin{cases} mx + 3y + 2 = 0 \\ x - 3y = 2 \\ 2mx - ny + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 10 = 0 \end{cases}$$

-----

4. On considère un cylindre de longueur  $L$  et de diamètre  $\Phi$ . Déterminer les valeurs  $x$  dont il faut à la fois diminuer la longueur et augmenter le diamètre pour obtenir d'autres cylindres dont le volume serait identique à celui du cylindre d'origine. Discuter les solutions en fonction du diamètre et de la longueur.

**Juillet 2006. Série 2.**

---

1. Soit  $m$  un paramètre réel. Résoudre et discuter l'équation suivante (dans les réels) :

$$\sin^2 x + 4m \cos x - 2m - 3 = 0$$

-----

2. Déterminez les paramètres réels  $a, b, c$ , pour que le polynôme :

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + 1$$

soit divisible par  $(x-1)^3$ .

-----

3. Résoudre, dans les nombres réels, le système d'équations suivant en  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} \frac{x}{x-a} + \frac{y}{y-b} = 2 \\ (a+b)(x-3y) = a^2 + 3b^2 \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres réels.

-----

4. Un peintre en bâtiment commence son travail tôt le matin. Au bout d'un certain temps, un deuxième peintre vient l'aider. Au bout du même temps, un troisième peintre arrive ; et ainsi de suite jusqu'à ce que toute l'équipe, formée au total de 9 peintres, termine le travail. Les peintres travaillent tous à la même vitesse. Le premier peintre a travaillé 3 fois plus de temps que le dernier arrivé et il n'aurait travaillé que 8 heures si l'équipe entière avait travaillé dès le début. Combien de temps a travaillé le premier peintre ?

**Septembre 2006.**

1. Soit  $a$  un paramètre réel. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, l'équation suivante :

$$\sqrt{e^{-x} - 3} + \sqrt{e^{-x}} - a = 0$$

..

2. Déterminez, dans les nombres complexes, les valeurs de  $z$  (sous la forme  $a + ib$ ) pour lesquelles on a :

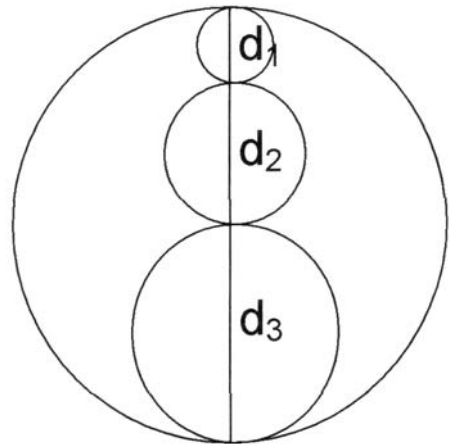
$$z^7 - \frac{2+i}{i-3}z^4 - z^3 + \frac{2+i}{i-3} = 0$$

3. Trouvez un polynôme  $P(x)$  sachant que :

- il est du 4ème degré
- le reste de sa division par  $(x - 1)$  vaut -30
- le reste de sa division par  $(x - 2)$  vaut -54
- il est divisible par  $x$
- il est divisible par  $(x^2 + 5)$

et calculez les 4 racines de ce polynôme.

4. Dans sa pizzeria du centre de Palerme, Tino confectionne d'importantes pizzas circulaires de 74 cm de diamètre, suffisamment copieuses pour satisfaire toute une famille. Pour répondre à une demande de certains clients, Tino décide de commercialiser des pizzas plus petites. Il les vendra par lots de 3 unités, de diamètres différents. En les mettant bout à bout, ces 3 pizzas entrent exactement dans les emballages des pizzas de diamètre 74 cm (voir figure). Le lot de 3 pizzas est vendu au prix d'une grande, ce qui lui procure un bénéfice appréciable, puisque la surface totale de ces 3 disques est exactement la moitié de celle d'une grande pizza de diamètre 74 cm. Par ailleurs, il se trouve que le carré de la différence entre le diamètre du plus petit disque et du disque de taille intermédiaire coïncide exactement avec le diamètre du plus grand disque.



Quels sont les diamètres des 3 pizzas ?

\*\*\*\*\*