

Algèbre
Juillet 2010 - Série 1

1.a) Démontrez la relation générale : $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; et indiquez les conditions auxquelles doivent obéir a et b (Réponse en 5 lignes max.)

1.b) Résolvez dans \mathfrak{R} le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \log_x 10 + \log_y 10 = 5 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

2. Résolvez dans \mathfrak{R} l'inéquation :

$$\left| \frac{1}{x+2} \right| < \left| \frac{2}{x-1} \right|$$

3. Soit l'équation suivante dans les Complexes où le paramètre m est un réel :

$$z^2 - (3 - 8i)z - 4(m + 3i) = 0$$

- Résolvez l'équation en z .
 - Pour quelle valeur du paramètre réel m , l'équation admet-elle une racine imaginaire pure et que valent alors les racines ?
 - Pour quelle valeur du paramètre réel m , l'équation admet-elle une racine réelle pure et que valent alors les racines ?
-

4. Benjamin et son copain Manu ont assisté au match de quart de finale de la coupe du monde entre le Ghana et l'Uruguay le 2 juillet dernier.

Au moment où les entrées dans le stade débutent, à 15h30, on leur annonce qu'il y a 70000 personnes devant eux dans la file.

La première heure, le rythme des entrées dans le stade est très soutenu mais cela ralentit pendant la seconde heure : entre 16h30 et 17h30, il n'y a plus que 15000 personnes qui parviennent à entrer, ce qui représente k fois le nombre des entrées de la première heure.

Pendant la troisième heure, les entrées se ralentissent encore par rapport à la deuxième heure avec le même facteur k . Toutefois, le stade est tout juste rempli au moment où le match débute, à 18h30.

Pour la sortie, 15000 spectateurs acharnés restent dans le stade très tard à faire la fête alors que tous les autres spectateurs sont sortis du stade en seulement deux heures. Le rythme de sortie est soutenu durant la première heure mais se réduit de moitié pendant la seconde heure et l'on sait que seulement 25000 personnes sortent au cours de la seconde heure.

Nous voulons savoir :

- que vaut k ?
- si Benjamin et Manu étaient déjà dans le stade à 16h30 ?
- combien de spectateurs étaient dans le stade à 16h30 ?
- combien de spectateurs ont assisté au match ?

Note : mettez ce problème en équation(s), justifiez toutes vos réponses et arrondissez le nombre de spectateurs à l'unité la plus proche dans vos réponses finales.

Algèbre
Juillet 2010 - Série 2

1. Résoudre dans les réels le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$$

Expliquez clairement les étapes de votre raisonnement.

2. Calculez dans les réels les coefficients p et q et les deux racines distinctes x_1 et x_2 de l'équation :

$$x^2 + px + q = 0$$

sachant que ces racines x_1 et x_2 augmentées chacune de 1 deviennent celles de l'équation

$$x^2 - p^2x + pq = 0$$

3. Résoudre dans les réels l'inéquation :

$$2(2x + 1) - 3\sqrt{6 - x - x^2} \leq 0$$

4. Élise vient de terminer ses humanités et profite de vacances bien méritées en Provence avec toute sa famille. A sa grande surprise, c'est en pleine randonnée en montagne qu'elle réalise que l'algèbre peut être bien utile.

Avant le départ, elle se charge de la répartition des vivres dans les sacs à dos. Elle met dans son sac le pique-nique et répartit dans les sacs à dos de ses trois frères les boissons placées dans des gourdes d'une contenance d'un demi litre chacune (au départ toutes les gourdes sont remplies).

Lors de la randonnée, les promeneurs passent près de fontaines où il y a moyen de remplir les gourdes lorsque celles-ci sont complètement vides. Au retour, Élise fait les comptes de l'eau qui a été consommée et réalise qu'ils n'ont pas été très économes puisque toutes les gourdes sont vides alors que Pierre a vidé deux fois toutes ses gourdes, François trois fois et Antoine quatre fois, pour un total de trente sept litres, dont la plupart a servi à des jeux d'eau (qui n'ont d'ailleurs pas épargné Élise !).

Par ailleurs, Élise sait que la première fois qu'ils se sont désaltérés (toutes les gourdes étaient alors pleines), les trois frères ont bu les quantités suivantes :

- Pierre a bu le dixième de sa réserve d'eau, ce qui représente un verre d'eau plus un dixième de litre.
- François a bu le huitième de sa réserve d'eau, ce qui représente un verre d'eau plus un quart de litre.
- Antoine a bu le sixième de sa réserve d'eau, ce qui représente un verre d'eau plus un demi litre.

On vous demande combien de gourdes d'un demi litre Pierre, François et Antoine avaient-ils chacun emmenées dans leur sac. Pouvez-vous confirmer que Pierre, le plus jeune, a dû porter la charge la moins lourde ? Mettez ce problème en équation(s) et justifiez toutes vos réponses.

Algèbre
Septembre 2010

1. Soient a et b deux paramètres réels. Discuter et résoudre, dans les nombres complexes, l'équation suivante (où i est l'unité imaginaire) :

$$a^2 z^2 + (iz + b)^2 = 0$$

Soyez complets.

2. Résoudre dans \Re le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 34 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{8}{15} \sqrt{xy} \end{cases}$$

Détaillez votre raisonnement pour résoudre ce système.

3. Déterminer le polynôme $P(x)$ du 4ème degré tel que :

- 1) le coefficient de x^4 dans $P(x)$ vaut 1,
- 2) $P(x)$ est divisible par $x^2 + x + 1$,
- 3) le reste de la division de $P(x)$ par $x^2 - 1$ est $-3x + 9$.

Calculez ensuite les racines réelles de l'équation $P(x) = 0$.

4. Lors d'un de leurs rares moments de détente, Kevin et Jonathan décident de jouer aux fléchettes. Leur soeur Olivia les regarde et souhaiterait connaître la valeur des points obtenus pour chacune des trois zones de la cible délimitées par trois couleurs (noir, jaune et rouge). Or, Olivia connaît seulement les différences de scores entre ses deux frères après que ceux-ci aient lancé chacune de leurs 5 fléchettes à chaque partie (une fléchette envoyée hors de la cible ne rapporte aucun point).

Lors de la Partie 1, Kevin met une fléchette dans le noir et quatre dans le jaune alors que Jonathan met une seule fléchette dans la partie rouge de la cible. Après cette partie, Kevin mène d'un point.

Lors de la Partie 2, Kevin met deux fléchettes dans le noir et deux dans le rouge alors que Jonathan met trois fléchettes dans le jaune. Au terme de ces DEUX parties, Kevin mène de 22 points.

La Partie 3 est un peu particulière puisque Kevin met toutes ses fléchettes à côté alors que Jonathan en met trois dans le noir, une dans le jaune et une dans le rouge. On vous demande tout d'abord quel a été le score de Jonathan pour cette Partie 3 si vous savez qu'il est impossible pour Olivia de trouver la valeur des trois couleurs (noir, jaune et rouge) après ces trois parties. Calculez ensuite la différence de points entre les deux frères au terme de ces TROIS parties.

Et finalement, la Partie 4 permet à Kevin de lancer deux fléchettes dans le jaune et une dans le rouge alors que Jonathan met une seule fléchette dans le noir. Au score FINAL du marquoir, Olivia note que Kevin mène au score par 17 unités, ce qui lui permet de trouver la solution du problème.

Combien de points rapporte chaque fléchette lancée respectivement dans le noir, le jaune et le rouge de la cible ?
