Juillet 2006. Série 1.

---

1. Pour tout réel λ, on définit la fonction f_λ sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs noté $\mathbb{R}_+^*$, par :

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda + \ln x}{1 + x^2}$$

a) Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan avec $\alpha > 0$. Démontrer que par M passe une et une seule courbe (C_λ) représentative de f_λ.
b) Démontrer que pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\lambda + \ln x)$
c) Etudier les variations de g_λ. On démontrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette solution sera notée m_λ.
d) Dresser le tableau de variation de f_λ. Démontrer que $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$ et représenter graphiquement (C_1).

2.

1. Comparer, sans les calculer, les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$$

2. On pose $f(x) = \sqrt{e^{-1/x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Etudier la dérivabilité de f en 0.

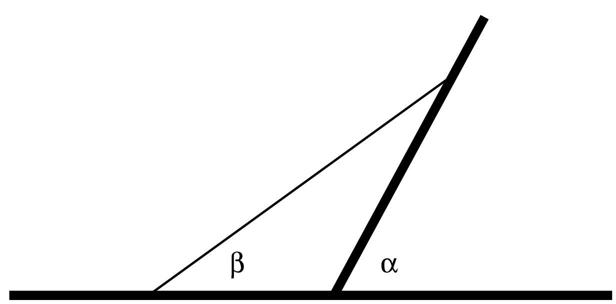
3. Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$.

4. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x \ln x)}{x}$$

---

3. Sur une surface horizontale, il y a un plan incliné qui fait un angle α avec cette surface. Supposons que $0 < \alpha < 90$ (en degrés).



On pose une échelle contre le plan incliné comme indiqué dans la figure. Quel est l'angle β que l'échelle doit faire avec la surface horizontale pour que la coupe transversale entre l'échelle, la surface horizontale et le plan incliné ait une superficie maximale ? Quelle est cette superficie en fonction de la longueur de l'échelle ?

Juillet 2006. Série 2.

---

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x \text{ Arcos } x$$

a) Donner son domaine de définition.

b) Déterminer f' et son domaine de définition.

c) Déterminer f'' et en déduire le tableau de variation de f'.

d) Démontrer que f' s'annule pour une valeur unique $\alpha \in]0,1[$.

e) En déduire le tableau de variation de f et démontrer que f admet un extremum égal à $\dfrac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

f) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé en précisant les demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et 1.

2.

1. Soient f et g les fonctions telles que :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Déterminer le domaine de définition de $f \circ g$ puis déterminer $(f \circ g)(x)$.

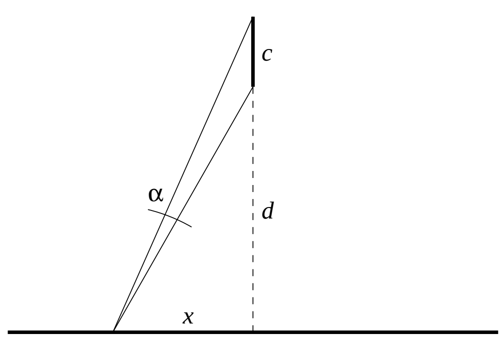
2. Donner le signe de $I = \int_1^0 (x - x^2)e^x dx$, puis calculer I.

3. Calculer la limite de la fonction : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ quand x tend vers 1.

4. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$.
Etudier la dérivabilité de f en 0.

---

3. A distance d d'un chemin rectiligne, il se trouve un mur rectiligne de longueur c qui forme un angle droit avec le chemin.



Supposons que nous nous trouvons sur le chemin à un endroit qui est à distance x de l'intersection du chemin avec la prolongation du mur. A cet endroit le mur est visible sous l'angle α. Quelle est la valeur de x pour laquelle l'angle α est maximal ? Quel est cet angle ? Vous pouvez supposer que l'épaisseur du mur est négligeable.

Septembre 2006.

1.

1. Calculer
$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$$
2. Calculer
$$\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{x-x\ln x}dx$$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}+x-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$$

   1) Déterminer a pour que f soit continue en $x=0$.

   2) Pour la valeur de a trouvée en 1, démontrer que f est dérivable en 0.

---

2. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par :
$$g(x)=1-x-e^{-2x}$$

a) Etudier les variations de g.
b) Démontrer qu'il existe un unique réel a strictement positif tel que $g(a)=0$, puis prouver que $a\in]\frac{\ln 2}{2},1[$.
c) Etudier le signe de g.

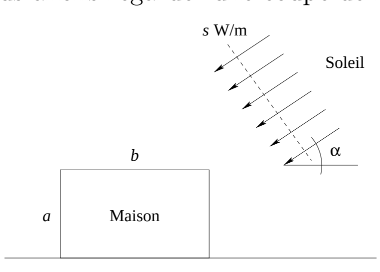
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$f(x)=x\sqrt{e^{2/x}-1}$$

d) Montrer que pour tout x strictement positif
$$f'(x)=\frac{e^{2/x}}{\sqrt{e^{2/x}-1}}\,g\left(\frac{1}{x}\right)$$

e) En déduire les variations de f.
(On ne demande pas de calculer la limite de f quand x tend vers 0.)

---

3. Nous allons investiguer l'insolation d'une maison. Dans le cas général, c'est un problème en trois dimensions. Pour simplifier le problème, nous allons regarder une coupe de la maison en deux dimensions :



Supposons que la maison a une hauteur de a mètres et une largeur de b mètres. Les rayons du soleil forment un angle α avec le sol. Le soleil envoie une puissance de s Watt/mètre, mésurée en angle droit avec les rayons. Répondez alors aux deux questions suivantes :

1. Quelle est la valeur de α en fonction de a, b et s pour laquelle l'insolation est maximale ?
2. Quelle est la valeur de cette insolation maximale en fonction de a, b et s ?
