Juillet 2008. Série 1.

---

1. (a) Calculez une primitive de la fonction suivante

$$f(x) = 2x \operatorname{arctg} x \ .$$

(b) Calculez la limite suivante

$$\lim_{u \to 1} \frac{\sin(u-1) - \ln u}{u^2 - 2u + 1} \ .$$

(c) Esquissez le graphe de la fonction

$$f(x) = \max\{4x - x^2, 0\}$$

puis calculez l'aire de la surface du plan située entre ce graphe et l'axe des abscisses.

(d) Soit f une fonction paire et dérivable. Démontrez *rigoureusement* que $f'(0) = 0$.

---

2. Soit f la fonction définie pour les réels strictement positifs par

$$f(x) = \frac{e^{-1/x}}{x}$$

et $\mathcal{C}$ la courbe du plan définie par $y = f(x)$ pour $x > 0$ (c'est le graphe de f).

(a) Calculez la limite $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et les fonctions dérivée $f'(x)$ et dérivée seconde $f''(x)$.
Conseil : utilisez un changement de variable pour calculer la limite.

(b) Déterminez l'équation des éventuelles asymptotes de $\mathcal{C}$.

(c) Dressez un tableau des variations de f contenant
   i. les racines et le signe de f, f' et f'',
   ii. les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f,
   iii. les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f.

(d) A l'aide des résultats obtenus plus haut, représentez la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.

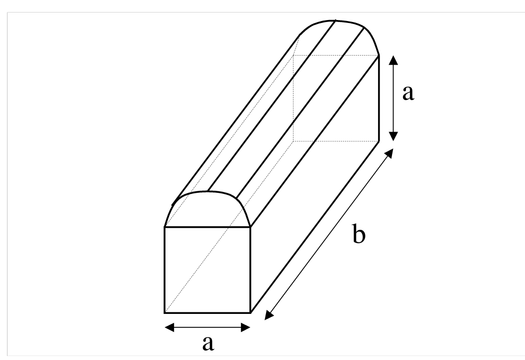
(e) En utilisant les résultats obtenus aux points précédents, discutez en fonction du paramètre réel λ le nombre de solutions strictement positives de l'équation (en x) ci-dessous

$$x \ln(\lambda x) = -1 \ .$$

---

3. On considère un pain correspondant à la figure ci-contre, de longueur b (en cm) et dont la section se compose d'un carré de côté a (en cm) surmonté d'un demi-cercle de rayon $\frac{a}{2}$.

En tant qu'amateur de pain, j'aime la mie moelleuse et je n'aime pas la croûte. Pour un volume de mie donné, quelles dimensions donner au pain pour obtenir un minimum de croûte ?



(a) Exprimez le volume de la mie V et la surface totale de la croûte S en fonction des dimensions a et b (en négligeant l'épaisseur de la croûte).

(b) En supposant le volume V connu et constant, déterminez en fonction de V les valeurs des dimensions a et b qui conduisent à la plus petite surface S possible.

(c) Quelle est la valeur de S obtenue ? Quel est le rapport de dimensions $\frac{a}{b}$ correspondant ?

Juillet 2008. Série 2.

---

1. (a) Calculez l'intégrale suivante
$$\int_{-2}^{3} e^{-|t|}\mathrm{d}t \ .$$
(b) Calculez une primitive de la fonction suivante
$$f(x) = (\ln x)^2 \ .$$
(c) Soit a un paramètre réel positif. On considère la région du plan définie par
$$S_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |x| \leq a \quad \text{et} \quad |y| \leq \frac{1}{1+x^2}\right\} .$$
Calculez l'aire de S_a puis déterminez sa limite lorsque a tend vers l'infini.
(d) On considère la fonction $f(x) = x(x-1)\sin(x^2 + e^{x+1})$.
Démontrez *rigoureusement* qu'il existe au moins un réel a tel que $f'(a) = 0$.
Indice : il n'est pas nécessaire de calculer la dérivée de la fonction f.

2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \ln(1 + x + x^2)$$
et $\mathcal{C}$ la courbe du plan définie par $y = f(x)$ (c'est le graphe de f).
(a) Quel est le domaine de f ? La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle des asymptotes ?
(b) Calculez les fonctions dérivée $f'(x)$ et dérivée seconde $f''(x)$.
(c) Dressez un tableau des variations de f contenant
   i. les racines et le signe de f, f' et f'',
   ii. les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f,
   iii. les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f
(il n'est *pas* nécessaire de calculer les ordonnées des différents points obtenus).
(d) A l'aide des résultats obtenus plus haut, représentez la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.
(e) On considère une seconde fonction g, quadratique, définie à l'aide de trois paramètres a, b et c par
$$g(x) = ax^2 + bx + c \ .$$
   i. Déterminez les valeurs des paramètres a, b et c de telle façon que les valeurs des fonctions f et g coïncident au point d'abscisse $x = 0$, ainsi que leurs dérivées et leurs dérivées secondes (en d'autres termes, on souhaite avoir les trois égalités $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$ et $f''(0) = g''(0)$).
   ii. Si on considère alors que, pour ces paramètres, la fonction g fournit une bonne approximation de f autour de l'abscisse $x = 0$, utilisez cette fonction g pour calculer une valeur approchée de la quantité $\ln(1.11)$.

3. La consommation d'essence d'une voiture dépend de sa vitesse ; de façon plus précise, on suppose que la consommation instantanée C (en litres par heure) dépend de la vitesse instantanée v (en kilomètres par heure) selon la fonction[1]

$$C(v) = a + b \cdot v^2$$

où a et b sont des paramètres connus dépendant de la voiture (exprimés respectivement en litres par heure et en litres fois heures par kilomètre carré).

   (a) Pour une voiture roulant à vitesse constante, déterminez en fonction des paramètres a et b la vitesse qui minimise la consommation d'essence nécessaire pour parcourir un kilomètre.

   (b) On suppose à présent qu'une voiture se déplace le long d'un axe rectiligne, et que la distance parcourue le long de cet axe (en kilomètres) est donnée en fonction du temps écoulé (en heures) par la fonction

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{d}\right)$$

   où d est un paramètre correspondant à la durée nécessaire pour parcourir un kilomètre en démarrant au temps $t = 0$.

      i. Déterminez l'évolution de la vitesse instantanée en fonction du temps écoulé lors de ce parcours d'un kilomètre.

      ii. Calculez, en fonction des paramètres a et b et de la durée d, la consommation totale d'essence nécessaire pour parcourir ce kilomètre.

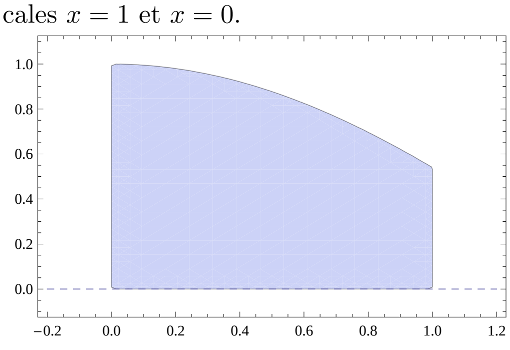
      iii. Déterminez en fonction des paramètres a et b pour quelle durée d la consommation nécessaire est minimale.

   (c) Comparez les consommations obtenues aux points 1 et 2 pour le parcours d'un kilomètre.

Septembre 2008.

---

1. a. La surface grisée sur la figure ci-dessous est délimitée par la courbe d'équation $y = \cos x$, l'axe des abscisses $y = 0$ et les droites verticales $x = 1$ et $x = 0$.



   Calculez le volume du solide de révolution engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe des abscisses.

   b. Calculez l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\tan x)}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

   c. Calculez la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{(\sin t) - t}{t^3}\ .$$

   d. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{lorsque } x > 0 \end{cases}\ .$$

   Étudiez la dérivabilité de la fonction f au point $x = 0$.

---

[1] La consommation croît plus rapidement qu'une fonction linéaire à cause de la résistance de l'air.

2. Soit f la fonction

$$f(x) = x\Big(\ln(x^2)\Big)^2$$

définie partout sauf en $x = 0$, et $\mathcal{C}$ la courbe du plan définie par $y = f(x)$ (c'est le graphe de f).

   (a) La fonction f est-elle paire ? impaire ? La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle des asymptotes ? Quelle valeur faudrait-il donner à la fonction f en $x = 0$ pour qu'elle y soit continue ?

   (b) Calculez les fonctions dérivée $f'(x)$ et dérivée seconde $f''(x)$ puis dressez un tableau des variations de f contenant

      i. les racines et le signe de f, f' et f'',

      ii. les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f,

      iii. les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f

      Note : Pour les calculs, on pourra prendre les valeurs approchées $\frac{1}{e} \approx 0.35$ et $\frac{1}{e^2} \approx 0.15$.

   (c) A l'aide des résultats obtenus plus haut, représentez soigneusement la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en indiquant les coordonnées des points remarquables.

   (d) Sans effectuer de nouvelle étude de fonction, esquissez le graphe des trois fonctions

$$g(x) = -2x\Big(\ln(\frac{1}{x^2})\Big)^2 \qquad h(x) = \frac{x}{3}\Big(\ln(x^2) - \ln(9)\Big)^2 \qquad k(x) = 4|x|\Big(\ln|x|\Big)^2$$

---

3. Un amateur de bière fraîche (qui restera anonyme) boit toujours dans des verres dont le volume total est exactement d'un litre et dont la forme est parfaitement cylindrique.

   On cherche les dimensions (hauteur et rayon de la section) du verre qui permettent à la bière de garder sa fraîcheur le plus longtemps possible. On supposera pour cela que la perte de fraîcheur est proportionnelle à la surface totale de la bière (c'est-à-dire la somme de la surface en contact avec le verre et de la surface exposée à l'air), et on négligera l'épaisseur du verre.

   (a) Modélisez ce problème de façon mathématique, en identifiant les variables à déterminer, les quantités pertinentes et les contraintes à respecter (n'oubliez pas de préciser les unités).

   (b) Calculez les dimensions optimales à donner au verre.

****