

PRÉNOM ET NOM : _____

NUMÉRO : _____

Question 1

1. Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2} \right).$$

2. On sait que la fraction $\frac{22}{7}$ fournit une bonne approximation rationnelle du nombre π .

- (a) Démontrer l'égalité suivante

$$\int_0^1 \frac{x^4 (1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi.$$

Indication. La division du numérateur par le dénominateur conduit à l'égalité

$$x^4(1-x)^4 = (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)(x^2 + 1) + r(x)$$

où le reste $r(x)$ est encore à déterminer.

- (b) A l'aide de cette égalité, décider si $\pi > \frac{22}{7}$ ou $\pi < \frac{22}{7}$.

(il est possible de répondre à cette question sans avoir démontré l'égalité au point (a))

3. Soit f une fonction continue définie sur \mathbb{R} telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

- (a) Démontrer que $f(0) = 0$.

Conseil. Utiliser l'identité $f(x) = \frac{f(x)}{x} \cdot x$.

- (b) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.



PRÉNOM ET NOM : _____

NUMÉRO : _____

Question 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x\sqrt{3} - 2\sin x$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f . Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, \pi]$ et construire l'arc de courbe \mathcal{C}_1 correspondant (sachez que $\pi\sqrt{3}$ vaut approximativement 5.4).
(b) Étudier la parité de f . En déduire comment la courbe \mathcal{C}_2 représentative de f sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ se déduit de \mathcal{C}_1 .
(c) Pour tout nombre réel x , exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$. En déduire que le graphe complet \mathcal{C} se déduit de \mathcal{C}_2 par des translations successives, que l'on précisera.
2. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α appartenant à l'intervalle $[\frac{\pi}{6}, \pi]$.
(b) Démontrer que cette solution α appartient en fait à l'intervalle $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$.
3. Soit g la fonction définie sur $[\alpha, \frac{\pi}{3}]$ par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
(a) Démontrer que $g(x) \leq x$ pour tout élément x de l'intervalle $[\alpha, \frac{\pi}{3}]$.
(b) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ appartenant à $[\alpha, \frac{\pi}{3}]$.
(c) Dresser le tableau des variations (sans dérivée seconde) de g sur $[\alpha, \frac{\pi}{3}]$ et montrer que si $\alpha \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, alors $\alpha \leq g(x) \leq \frac{\pi}{3}$.
(d) *Bonus.*
On définit la suite $\{x_n\}$ par $x_0 = \frac{\pi}{3}$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \geq 0$. Déduire des points (a), (b) et (c) le comportement de la suite lorsque n tend vers l'infini.

PRÉNOM ET NOM : _____

NUMÉRO : _____

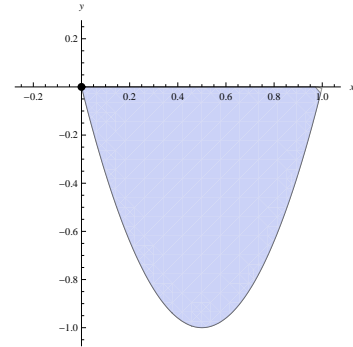
Question 3 – Le verre à moitié vide

La zone grisée représentée dans la figure ci-contre correspond à la surface située entre l'axe Ox et le graphe de la fonction

$$f(x) = x^2 - 4x$$

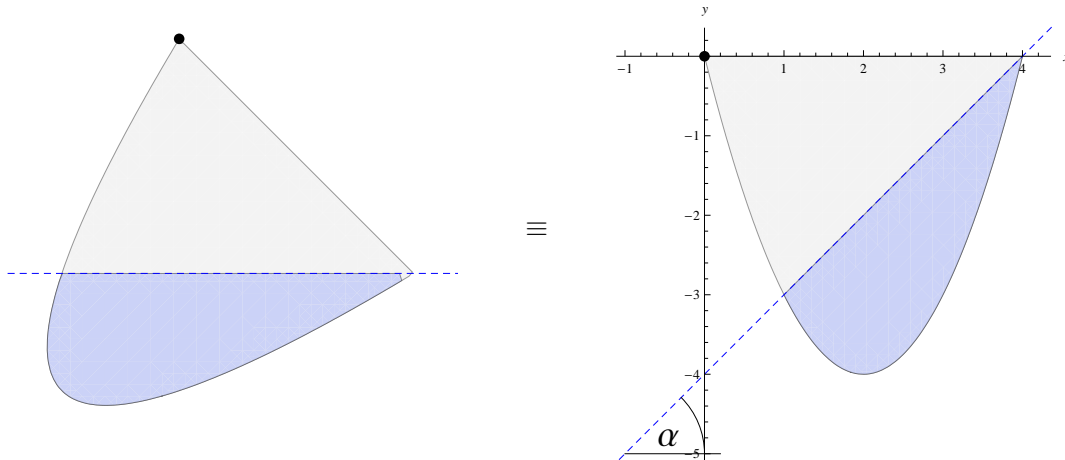
sur l'intervalle $[0, 4]$. Cette figure ressemble à la partie supérieure d'un verre (à deux dimensions), sans son pied.

Si on imagine un verre initialement rempli d'eau à ras bord, de quel angle faut-il pencher le verre pour qu'il n'en reste que la moitié?



Note. Pour ce problème, on se place dans un univers (fictif) à deux dimensions, pour lequel on suppose que les quantités d'eau mentionnées sont proportionnelles aux *surfaces* correspondantes.

Plutôt que de représenter un verre penché d'un certain angle (ci-dessous, à gauche), on raisonne sur la situation complètement équivalente où le verre reste droit et c'est le niveau de l'eau qui est penché du même angle (ci-dessous, à droite).



Soit α l'angle cherché, défini comme sur la figure de droite, et $m = \tan \alpha$ le coefficient angulaire correspondant.

1. Donner, en fonction de m , l'équation de la droite représentant le niveau de l'eau sur la figure de droite, et en déduire les coordonnées de ses deux intersections avec le verre.
2. Calculer en fonction de m la surface de la partie du verre remplie d'eau.
3. Déterminer la valeur du coefficient angulaire m conduisant à un verre à moitié rempli.

PRÉNOM ET NOM : _____

NUMÉRO : _____

Question 1

1. Calculer une primitive de

$$\frac{2x - 1}{(x - 3)^2 + 4} .$$

2. Calculer les deux limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \text{ et } \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} y .$$

Indication. L'une de ces limites se déduit aisément de l'autre.

3. Le théorème des accroissements finis s'énonce comme suit :

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$\frac{1}{5} < \ln\left(\frac{5}{4}\right) < \frac{1}{4} .$$

PRÉNOM ET NOM : _____

NUMÉRO : _____

Question 2

Au cours de cet exercice, on fera appel au résultat suivant, qui indique qu'une inégalité entre deux fonctions est préservée lorsqu'on intègre ses deux membres :

Si u et v sont deux fonctions continues telles que $u(t) \leq v(t)$ pour tout $t \geq 0$, on a

$$\int_0^x u(t)dt \leq \int_0^x v(t)dt \text{ pour tout } x \geq 0.$$

1. (a) Prouver que, pour tout nombre réel $t \geq 0$,

$$1 - t \leq \frac{1}{1 + t}$$

puis en déduire qu'on a pour tout nombre réel $x \geq 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x).$$

- (b) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x}{1 + x} - \ln(1 + x).$$

Démontrer que, pour tout nombre réel $t \geq 0$,

$$g'(t) \leq 0$$

puis en déduire qu'on a pour tout nombre réel $x \geq 0$

$$g(x) \leq 0.$$

2. On souhaite étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Démontrer à l'aide du point 1. que f est décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 (b) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
 (c) Démontrer que f est dérivable (à droite) en 0 et calculer $f'(0)$. Déterminer si f est continue en 0.
 (d) Donner l'équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} représentative de f au point d'abscisse 0 puis, grâce au point 1., préciser la position de \mathcal{C} par rapport à T.
 (e) Tracer dans un repère orthonormé la droite T et la courbe \mathcal{C} représentative de f , en utilisant les informations obtenues précédemment ainsi que le fait que la courbe \mathcal{C} ne possède aucun point d'inflexion.

(il est possible de répondre à la question 2. sans avoir démontré les inégalités du point 1.)

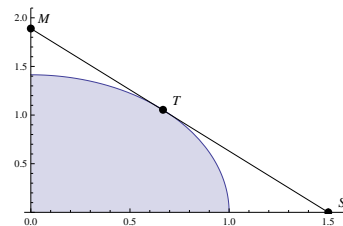
PRÉNOM ET NOM : _____

NUMÉRO : _____

Question 3 – La courte échelle

Sur la figure ci-contre, la zone grisée représente un bâtiment en forme de demi-dôme, et correspond à la surface comprise entre l'axe Ox , l'axe Oy et le graphe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{2 - 2x^2}.$$



Le segment MS représente une échelle, qui doit nécessairement

1. prendre appui sur le sol (l'axe Ox) au point S ,
2. prendre appui sur le mur vertical (l'axe Oy) au point M ,
3. être tangente au bâtiment en un point T .

Quelle est la plus petite longueur possible pour une échelle remplissant les trois conditions ci-dessus ?

1. Soit a l'abscisse inconnue du point de tangence T . Calculer l'ordonnée de T puis donner, en fonction de a , l'équation de la tangente au demi-dôme
2. En déduire les coordonnées des points M et S puis calculer, en fonction de a , le carré de la longueur de l'échelle MS .
3. Calculer le minimum du carré de la longueur de l'échelle et en déduire la longueur minimale possible pour l'échelle.

PRÉNOM ET NOM : _____

NUMÉRO : _____

Question 1

1. Calculer la dérivée de l'expression suivante par rapport à la variable y , x étant une constante :

$$\sqrt{y \cos 3x} + x \operatorname{tg}(y^2) .$$

2. Calculer la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \sin t - \sin 3t}{t - \sin t} .$$

3. Calculer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-2}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{9 - (x - 1)^2}} dx .$$

4. Le théorème des accroissements finis s'énonce comme suit :

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \text{ pour tout } x \text{ et } y \in \mathbb{R} .$$



PRÉNOM ET NOM : _____

NUMÉRO : _____

Question 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x + |x| - 2x - 3.$$

1. (a) La fonction f est-elle continue en tout point de son domaine ?
Est-elle dérivable en tout point de son domaine ? Justifier vos réponses.
- (b) Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de f .
Démontrer que la courbe (\mathcal{C}) admet une asymptote D , dont on précisera l'équation.
- (c) Etudier les variations de la fonction f .
- (d) Préciser la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à D , et construire la courbe (\mathcal{C}) .
2. Soit $\alpha < 0$ un paramètre réel négatif.
 - (a) Déterminer l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par la courbe (\mathcal{C}) , la droite D et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$, puis calculer la limite $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$.
3. Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $I = [0, +\infty[$.
 - (a) Démontrer que f_1 est une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J , que l'on précisera.
 - (b) On considère la fonction réciproque f_1^{-1} , définie sur le domaine J .
Construire sa courbe représentative (\mathcal{C}_1) .
 - (c) La fonction f_1^{-1} est-elle continue en tout point de son domaine J ?
Est-elle dérivable en tout point de son domaine J ?
 - (d) Démontrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

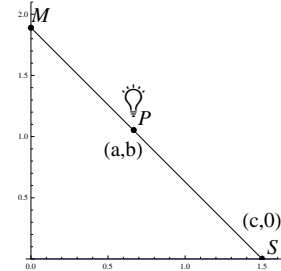
PRÉNOM ET NOM : _____

NUMÉRO : _____

Question 3 – Le retour de la courte échelle

Sur la figure ci-contre, le point P , situé un peu sous l'ampoule, a pour coordonnées (a, b) , où a et b sont deux paramètres. On souhaite changer l'ampoule et, pour cela, il est nécessaire d'installer une échelle

- a. s'appuyant sur le sol (représenté par l'axe Ox) au point S ,
- b. s'appuyant contre le mur vertical (l'axe Oy) au point M ,
- c. passant exactement par le point P .



Quelle est, en fonction des paramètres a et b , la longueur de la plus petite échelle possible remplissant les trois conditions ci-dessus ?

1. Soit c l'abscisse inconnue du point de contact S avec le sol. Calculer en fonction de a , b et c l'ordonnée du point de contact M avec le mur, puis le *carré* de la longueur de l'échelle MS .
2. Calculer en fonction de a et b le minimum du carré de la longueur de l'échelle et en déduire la longueur de la plus petite échelle possible.