Examen de trigonométrie et calcul numérique

L'examen de trigonométrie et calcul numérique se passe en deux parties :

1. Première partie :

Durée : de 9h30 à 11h00.

Cette partie comporte 3 questions, auxquelles vous devez répondre exclusivement sur les feuilles du questionnaire (y compris le verso). L'emploi de feuilles de brouillon est interdit. En cas de nécessité, demandez une feuille supplémentaire aux surveillants, qui vous en fourniront. L'emploi de calculettes est également interdit pour cette partie. A 11h00, les feuilles concernant cette partie doivent *obligatoirement* être remises aux surveillants.

2. Deuxième partie:

Durée: de 11h00 à 12h00.

Cette partie comporte une seule question (question 4), qui vous sera remise à 11h00. Pour cette question, vous pouvez utiliser une calculette (une calculette scientifique non programmable suffit), ainsi que des feuilles de brouillon (feuilles blanches, éventuellement quadrillées) de votre choix.

Recommandations générales :

N'oubliez pas d'inscrire vos nom, prénom et numéro d'inscription sur chaque feuille utilisée.

Les précisions sur les questions sont à poser aux responsables de cet examen: Mrs D. Flandre et P. Van Dooren, qui circuleront dans les différents auditoires. En cas de nécessité, faites-les appeler par les surveillants.

La résolution des questions ne requiert que l'utilisation des formules de base, rappelées ci-dessous. Toute autre formule utilisée sera explicitée, et les éléments de sa démonstration seront indiqués.

Formules de base de la trigonométrie :

La formule fondamentale :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

Formules donnant :

sin (-a), cos (-a), tg (-a); sin (π±a), cos (π±a), tg (π±a),

sin (π/2±a), cos (π/2±a), tg (π/2±a),

sin (a±b), cos (a±b), tg (a±b), sin 2a, cos 2a, tg 2a; 1 ± cos 2a,

sin a, cos a, tg a en fonction de tg a/2.

produits et sommes de cos, sin et tg.

Les transformations de a cos x + b sin x en E cos (x+p).

Les relations entre les angles et côtés d'un triangle rectangle et d'un triangle quelconque (règles des sinus et règles en cosinus).

Trigonométrie et calcul numérique

Admission UCL 2010

Nom :
Prénom :
N° :

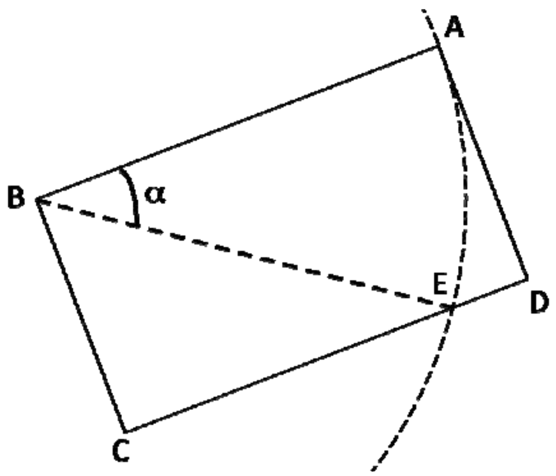
Question 1 :

Une pièce mécanique rectangulaire ABCD est usinée (c.-à-d. découpée) tangentiellement au côté AD en A, par une meule circulaire de centre B (voir le croquis ci-dessous).

1) Trouvez l'expression de la surface de la découpe (c.-à-d. formée par l'arc AE et les côtés AD et DE) en fonction de la longueur (p) et de la largeur (q) de la pièce ABCD. Indiquez sur le croquis, les paramètres intermédiaires éventuellement utilisés.

2) Donnez l'angle α, la longueur CE et les surfaces ABE et BCE pour p = 2 dm et q = $\sqrt{2}$ dm.

3) Si on coupe ensuite la pièce selon BE et que l'on souhaite recycler la découpe BCE, quelle est l'expression de la surface maximale du rectangle que l'on peut y inscrire ? Développer le raisonnement mathématique (sans utiliser de valeurs numériques).



Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL 2010

Nom :
Prénom :
N° :

Question 2 :

L'équation en x suivante résulte du mélange de deux signaux de télécommunications qui sont eux-mêmes des fonctions trigonométriques :

$f(x) = 2 \cdot a \cdot (1 - \sin^2(x)) \cdot \sin((\pi/2)-x) \cdot \sin(x) - 3 \cdot \sin(2x)$

• Pour quelles valeurs de a, les racines de l'équation f(x) = 0 sont-elles toutes réelles ?

• Si a = 4, pour quelles valeurs de x, l'équation donne-t-elle des valeurs positives dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$?

Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL 2010

Nom :
Prénom :
N° :

Question 3 :

Pour les affirmations suivantes, cochez l'unique affirmation qui est vraie.

- Sous l'hypothèse que a<b<c, quelle condition supplémentaire faut-il pour assurer l'existence d'un triangle (non-dégénéré) avec cotés a,b,c

  a<c-b ☐ b-a<c ☐ c<a+b ☐

- Dans l'intervalle –π/2 < a < π/2, l'équation $\frac{1-tg^2a}{1+tg^2a}=1/2$ possède exactement

  1 solution ☐ 2 solutions ☐ 3 solutions ☐

- L'expression $(2\cos a+1)(2\cos a-1)(2\cos 2a-1)$ est identiquement égale à

  $2\cos 4a+1$ ☐ $2\sin 4a+1$ ☐ $\sin 2a\cos 2a+1$ ☐

- Si dans un triangle ABC rectangle en A, les côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C) satisfont $b=2c$, alors

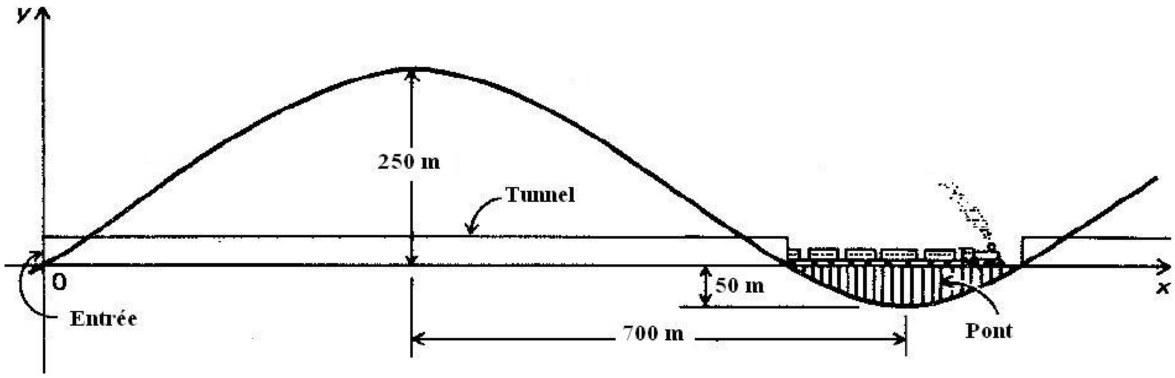
  B < 30° ☐ B = 30° ☐ B > 30° ☐

Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL 2010

Nom :
Prénom :
N° :

Question 4 :

La coupe d'une montagne a un profil sinusoïdal et on décide d'y construire une voie ferrée comme indiqué dans le croquis ci-dessous :



1/ Trouvez des expressions pour les paramètres a,b,c,d qui correspondent avec le profil y=f(x) du type :

$$y = a \sin (bx+c) + d$$

et avec les mesures indiquées sur le croquis (expliquez votre raisonnement).

2/ Donnez une expression pour la longueur t_1 du tunnel et p_1 du pont (sur l'axe y = 0), en fonction des paramètres a,b,c,d. Calculez ensuite la valeur de t_1 et de p_1 à 1 mètre près.

3/ On décide alors de rehausser la trajectoire de la voie ferrée de 50 mètres. Calculez la nouvelle valeur de t_2 du tunnel et p_2 du pont à 1 mètre près.

Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL 2010

Nom :
Prénom :
N° :

L'examen de trigonométrie et calcul numérique se passe en deux parties :

1. Première partie :

Durée : de 9h30 à 11h00.

Cette partie comporte 3 questions, auxquelles vous devez répondre exclusivement sur les feuilles du questionnaire (y compris le verso). L'emploi de feuilles de brouillon est interdit. En cas de nécessité, demandez une feuille supplémentaire aux surveillants, qui vous en fourniront. L'emploi de calculettes est également interdit pour cette partie. A 11h00, les feuilles concernant cette partie doivent *obligatoirement* être remises aux surveillants.

2. Deuxième partie:

Durée: de 11h00 à 12h00.

Cette partie comporte une seule question (question 4), qui vous sera remise à 11h00. Pour cette question, vous pouvez utiliser une calculette (une calculette scientifique non programmable suffit), ainsi que des feuilles de brouillon (feuilles blanches, éventuellement quadrillées) de votre choix.

Recommandations générales :

N'oubliez pas d'inscrire vos nom, prénom et numéro d'inscription sur chaque feuille utilisée.

Les précisions sur les questions sont à poser aux responsables de cet examen: Mrs D. Flandre et P. Van Dooren, qui circuleront dans les différents auditoires. En cas de nécessité, faites-les appeler par les surveillants.

La résolution des questions ne requiert que l'utilisation des formules de base, rappelées ci-dessous. Toute autre formule utilisée sera explicitée, et les éléments de sa démonstration seront indiqués.

Formules de base de la trigonométrie :

La formule fondamentale :

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

Formules donnant :

sin (-a), cos (-a), tg (-a); sin (π±a), cos (π±a), tg (π±a),

sin (π/2±a), cos (π/2±a), tg (π/2±a),

sin (a±b), cos (a±b), tg (a±b), sin 2a, cos 2a, tg 2a; 1 ± cos 2a,

sin a, cos a, tg a en fonction de tg a/2.

produits et sommes de cos, sin et tg.

Les transformations de a cos x + b sin x en E cos (x+p).

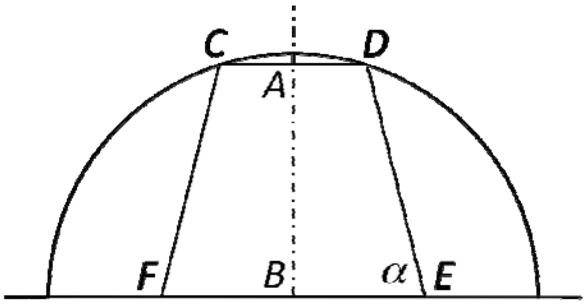
Les relations entre les angles et côtés d'un triangle rectangle et d'un triangle quelconque (règles des sinus et règles en cosinus).

Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL 2010

Nom :
Prénom :
N° :

Question 1 :

Soit à la figure ci-dessous, une pièce trapézoïdale *CDEF* symétrique par rapport à l'axe *AB*, de hauteur *h*, petite base *a* et grande base *b*. Les côtés ED et EF forment un angle α.



• Exprimez mathématiquement, en fonction de *a*, *h* et α, les longueurs de la grande base *b*, du côté *DE*, du segment *BD*, ainsi que l'angle β formé en *B* par les segments *BD* et *BE*.
• On ajoute de la matière à la pièce pour former un demi-cercle de centre *B* et de rayon *BD* plus grand que la longueur *BE*. Exprimez mathématiquement la surface ajoutée (représentée en grisé sur la figure) en fonction de *a*, *h* et α.
• Montrez qu'il existe une longueur *a* telle que la surface ajoutée soit minimale et exprimez cette longueur.

Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL 2010

Nom : Prénom : N° :

Question 2 :

• Déterminez les valeurs des paramètres a, b et c, telles que l'équation $f(x) = (a + b.\mathit{sin}\, x)^2 .\mathit{sin}\, x + c.\mathit{cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

soit égale à g(x) = *sin* x – 0,5 *sin* 3x.

• Donnez les racines de g(x) et les valeurs de x pour lesquelles g(x) ≥ 0 dans l'intervalle

[0 , 2π].

Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL 2010

Nom :
Prénom :
N° :

Question 3 :

Pour les affirmations suivantes, cochez quelle affirmation est vraie.

- Dans un triangle qui n'est pas isocèle, laquelle des mesures suivantes est la plus petite : la hauteur h, la médiane m ou la bissectrice b d'un même sommet ?

  m ☐ b ☐ h ☐

- Dans l'intervalle –π/2 < x < π/2, l'équation $1-\cos 2x = 3tgx$ possède exactement

  1 solution ☐ 2 solutions ☐ 3 solutions ☐

- L'expression $\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$ est identiquement égale à

  $tga - tgb$ ☐ $tga + tgb$ ☐ $tgb - tga$ ☐

- Si dans un triangle ABC on a que $\sin \mathrm{A} = 2\sin \mathrm{B}\cos \mathrm{C}$, alors

  B < C ☐ B = C ☐ B > C ☐

Trigonométrie et calcul numérique

Admission UCL 2010

Nom :
Prénom :
N° :

Question 4 :

On vole dans un ballon D à une hauteur **h** au dessus du sol, que l'on veut déterminer.

Au sol, trois balises A, B et C, forment un triangle équilatéral ABC de coté **d**.

Depuis le ballon D, on peut mesurer les distances **a**=DA, **b**=DB et **c**=DC et on remarque que deux d'entre elles sont égales (**b=c**).

1) Faites un croquis de la situation et indiquez-y les quantités **a, b, c, d** et **h**, ainsi que les variables intermédiaires que vous utiliserez dans vos calculs.

2) Donnez des formules qui permettent de dériver la hauteur **h** en fonction de ces variables.

3) Calculez la hauteur **h** à un mètre près pour les ensembles de données suivantes :

pour **d**=300m, **a**=**b**=**c**=200m et pour **d**=300m, **a**=450m, **b**=**c**=300m