Juillet 2008

---

1. Montrer qu'un triangle est équilatéral quand on a :

$$\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2$$

et

$$\sin B \sin C = \frac{3}{4}$$

A, B et *C* sont les angles ; *a, b* et *c* sont les côtés

---

2. Résoudre l'équation

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$$

---

3. Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est vraie, ou faux si l'affirmation est fausse.

- Dans un triangle il y a toujours deux angles dont la somme est supérieure ou égale à 120°

  vrai ☐ faux ☐

- L'expression $\cos^4 a - \sin^4 a$

  change exactement 4 fois de signe dans l'intervalle $-\pi < a < \pi$

  vrai ☐ faux ☐

- L'équation suivante est une identité

  $$\cos(a-b)\cos(a+b) - \sin(a-b)\sin(a+b) = \sin 2a$$

  vrai ☐ faux ☐

- Si le triangle ABC est rectangle en A, on a

$$(\sin B + \cos C)/(\cos B + \sin C) = \text{tg } B$$

vrai ☐ faux ☐

----

4. Un train de transport doit passer à travers un tunnel dont la section est un demi cercle de rayon **r** (=5 mètres). Le wagon du train a une longueur de 50 mètres, une hauteur de **h** mètres et une largeur de **l** mètres. Le train roule au milieu du tunnel et la hauteur du rail et des roues est de **d** (=0,5 mètres).

On vous demande de trouver **h** et **l** tel que le volume du wagon qui passe encore de justesse dans le tunnel, est maximal.

1/ Faites un croquis de la section du tunnel et du train.

2/ Donnez les formules pour **h** et **l** et le volume **V** en fonction d'un paramètre **α** que l'on optimisera.

3/ Dérivez **V(α)** par rapport à **α** pour trouver l'extremum

4/ Calculez le volume optimal à 0,1 m^3 près.

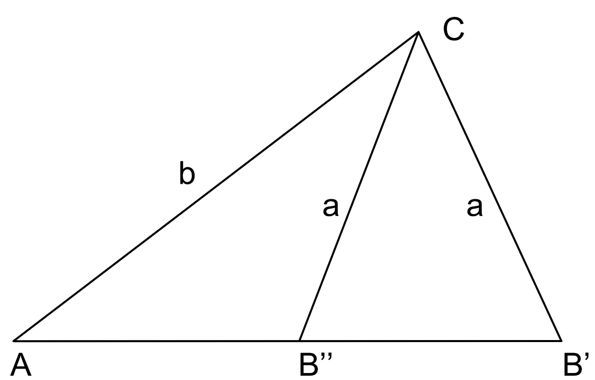
Septembre 2008

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle quand on a la relation suivante :

$$\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$$

---

2. Si dans un triangle, on connait a, b et A, il existe 2 solutions : le triangle AB'C et le triangle AB''C.



1. Calculer la différence AB'-AB''
2. Calculer l'aire du triangle B'CB''
3. Si C' et C'' sont les deux valeurs de C, montrer que : $\tan A = \operatorname{cotg}((C'+C'')/2)$

---

3. Pour les affirmations suivantes, cochez vrai ou faux.

- Dans un triangle la somme de deux angles quelconques est toujours supérieure ou égale à 60°

vrai ☐ faux ☐

- L'expression $\dfrac{2\cos a - 4\sin a}{\cos a}$ est positive dans tout l'intervalle $0 < a < \pi/4$

vrai ☐ faux ☐

- L'équation suivante a une racine double en x pour toute valeur de φ

$$x^2 + 2\cos\varphi\, x + (\cos 2\varphi + 1)/2 = 0$$

vrai ☐ faux ☐

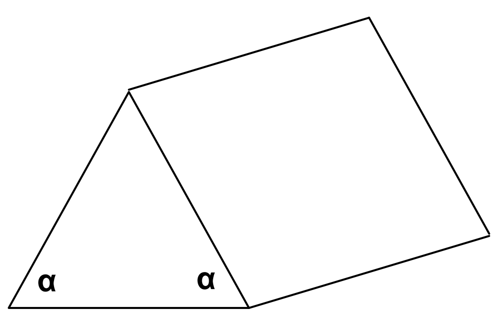
- Le triangle ABC est rectangle en A, si et seulement si

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$$

vrai ☐ faux ☐

---

4. On cherche la plus petite tente de camping possible dans laquelle on peut poser une boite cubique de (1m)x(1m)x(1m). La section de la tente est un triangle isocèle avec un angle **α** à la base.



On vous demande de trouver la hauteur **h** et longueur **l** tel que le volume de la tente qui puisse contenir exactement la boite, est minimal.

1/ Faites un croquis de la section de la tente et la boite et indiquez vos variables intermédiaires.

2/ Donnez les formules pour **h, l** et le volume **V** en fonction de l'angle **α** que l'on optimisera.

3/ Dérivez **V(α)** par rapport à **α** pour trouver la valeur extrémale de **α.**

4/ Calculez le volume optimal à 0,1 m^3 près.

****