Question 1 : (30%)

Soit une parabole P dont l'équation dans un repère cartésien est $y = a\,x^2$.

1) On translate P (sans rotation) de telle façon que le son sommet soit translaté du point $(x,y)=(0,0)$ vers le point $(x,y)=(x_o,y_o)$. Trouvez l'équation de cette nouvelle parabole P'.
2) On considère une droite D, mobile, passant par l'origine des axes $(x,y)=(0,0)$. Cette droite coupe la parabole P' en deux points A et B. Soit M le point milieu du segment reliant A et B. Trouvez l'équation du lieu de M.
3) A quelle famille de courbes appartient M ?
4) Une fraction du lieu doit être exclue. Trouvez cette fraction et expliquez votre raisonnement.

Les sous-questions (1) à (3) doivent faire l'objet, en plus du raisonnement, de réponses brèves encadrées (en cas d'erreur, le raisonnement sera aussi considéré).

Question 2 : (20%)

Un paraboloïde est donné par $z = a\,(x^2+y^2)$ dans un système de coordonnées cartésiennes. L'on dénote par $\boldsymbol{o}$ l'origine des coordonnées. Quelles sont les coordonnées du centre de la sphère qui passe par $\boldsymbol{o}$ et qui a, en ce même point, suivant les coordonnées x et y, les mêmes dérivées première et seconde que le paraboloïde (tangence avec même courbure) ?

Question 1 : (30%)

Soit un système de coordonnées cartésiennes (x,y). On considère la famille des paraboles (type A) qui ont pour axe de symétrie l'axe X et pour sommet le point $(c,0)$. Une autre famille (type B) est constituée de paraboles qui ont pour axe de symétrie l'axe Y et pour sommet le point $(0,d)$.

1) Donnez une équation cartésienne générale pour chacun des deux types de paraboles.
2) Faites un dessin montrant une parabole de type A et une parabole de type B telles qu'elles aient un et un seul point de contact (les paraboles sont tangentes).

Pour chaque parabole de type A, il existe une seule parabole de type B qui lui soit tangente. On se propose de chercher le lieu des points de contact entre ces paraboles. Soit (x_c,y_c) un tel point de contact. Pour trouver le lieu des points de contact (une équation liant x_c à y_c), l'on va utiliser le fait que, en un tel point, les droites tangentes aux deux paraboles ont la même pente (il s'agit d'ailleurs d'une seule et même droite).

3) Donnez une équation exprimant l'égalité de ces pentes.
4) Donnez, en fonction des paramètres c et d uniquement, l'équation du lieu des points de contact entre les paraboles.

Suggestion : évitez de résoudre des équations d'ordre élevé ; basez votre approche sur le fait que l'équation liant x_c à y_c ne peut faire apparaître que les paramètres c et d.

5) A quel type de courbes ce lieu appartient-il ?

Question 2 : (20%)

Dans l'espace, les points $\mathbf{r}=(x,y,z)$ d'un plan P sont définis par $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d$ où $\mathbf{n}=(a,b,c)$ est un vecteur unitaire et d est une constante (voir notes ci-dessous). On considère un point $\mathbf{r_o}$ qui n'appartient pas à P et un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ qui n'est pas parallèle à P.
Soit la droite D, qui passe par $\mathbf{r_o}$ et qui est parallèle à $\mathbf{u}$. Son point d'intersection avec P est nommé $\mathbf{r_1}$.

1) Faites un dessin représentant une configuration possible du problème ; représentez-y les différents objets (vecteurs, points, plan, droite) mentionnés ci-dessus.
2) Donnez une équation paramétrique pour la droite D.
3) Donnez, uniquement en fonction des vecteurs $\mathbf{n}$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{r_o}$ et de la constante d, la distance entre $\mathbf{r_o}$ et $\mathbf{r_1}$.

<u>Note 1:</u> $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$ représente le produit scalaire entre $\mathbf{r}$ et $\mathbf{n}$. Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1.
<u>Note 2:</u> pour vous convaincre de ce que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d$ représente bien l'équation d'un plan, explicitez le produit scalaire.

Question 1 : (25%)

On considère, dans un système de coordonnées cartésiennes, l'ellipse située à l'intersection d'un cône décrit par l'équation $z^2 = a^2 (x^2 + y^2)$ avec le plan $z = b\, y + d$. On supposera que $a,b,d > 0$ et $a>b$.

1) Dessinez des coupes du plan et du cône dans les plans XZ et YZ, ainsi qu'une projection (parallèlement à l'axe Z) de l'ellipse dans le plan XY.
2) Quelle est la longueur (en fonction des paramètres a, b et d) du grand axe de l'ellipse ? Gardez à l'esprit que l'ellipse est située dans un plan non perpendiculaire à l'axe du cône.
3) Le petit axe se trouve dans un plan $y=c$. Trouvez la constante c.
4) Expliquez brièvement (4 lignes maximum) comment vous pouvez trouver la longueur du petit axe. Un dessin sera le bienvenu.

Question 2 : (25%)

Donnez l'équation cartésienne de l'ellipse dont les foyers sont en $(x,y)=(0,0)$ et en $(x,y)=(1,1)$ et qui passe par le point $(x,y)=(0,1)$. Commencez par faire un dessin.

NB : l'exercice requiert la mise en œuvre d'une propriété des ellipses (14 points sur 25) ainsi qu'une partie algébrique qui permet d'amener le résultat sous une forme qui puisse être identifiée à l'équation d'une ellipse (11 points sur 25). Cette deuxième partie peut être un peu longue : essayez d'utiliser une « astuce » pour raccourcir le développement.