

Juillet 2004. Série 1.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les deux droites :

$$p \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$q \equiv \begin{cases} x = -s \\ y = 1 \\ z = s \end{cases}$$

On vous demande de déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de la droite s'appuyant sur les droites p et q et passant par le point $P = (0; -1; 2)$.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère la famille de cercles d'équations :

$$x^2 + y^2 - 2my - 1 = 0$$

où m est un paramètre réel variable. On vous demande :

1. de trouver les points qui appartiennent à tous les cercles de la famille,
2. de trouver le lieu des extrémités du diamètre parallèle à l'axe Ox pour tous ces cercles.
3. de dessiner et de caractériser ce lieu.

Juillet 2004. Série 2.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les deux droites :

$$p \equiv \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$q \equiv \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 3 - s \\ z = 2 + s \end{cases}$$

On vous demande de trouver le lieu de l'ensemble de points équidistants des deux droites p et q .

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère les éléments suivants :

- le cercle γ de centre $C = (-2; 1)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$,
- la droite d'équation $p \equiv 2x + y + 1 = 0$.

On vous demande de déterminer les droites tangentes à γ et parallèles à la droite p .

Septembre 2004.

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère les éléments suivants :

- la droite p passant par les points $A = (a, 0)$ et $B = (-a, b)$,
 - la droite q passant par les points $C = (-a, 0)$ et $D = (a, d)$,
- où a, b et d sont trois paramètres réels non nuls.

On vous demande :

1. de déterminer l'équation cartésienne du lieu de l'intersection des droites p et q si le produit des ordonnées des points B et D vaut une constante ζ non-nulle. ($b d = \zeta \neq 0$).
2. de discuter la nature du lieu d'après la valeur du paramètre ζ .

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les éléments suivants :

- le plan $\alpha \equiv x + 2y + 2z = 0$,
- le plan $\beta \equiv 3x - 4z = 5$,

On vous demande de donner l'équation de toutes les sphères tangentes aux deux plans, dont le centre se trouve sur le plan Oyz et dont le rayon vaut 5.

Juillet 2005. Série 1.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les éléments suivants :

– le plan : $\alpha \equiv 12x - 9y + 2z + 226 = 0$,

– le point : $P = (-11; a; -2)$,

– et la droite : $d \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = bt \end{cases}$

On vous demande

1. de déterminer a afin que le point P appartienne au plan α ,
2. de déterminer b afin que la droite d soit parallèle au plan α ,
3. de déterminer les équations paramétriques de la droite p passant par le point P et perpendiculaire au plan α .

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère γ , le cercle centré à l'origine et de rayon unitaire. D'autre part, on a le point $A = (-a; 0)$ où a est une constante réelle strictement positive.

On vous demande :

1. de calculer la valeur de a afin que les deux droites issues de A et tangentes au cercle forment un angle de $\pi/3$ (dans le triangle formé par A et les deux points de tangence).
2. de donner le lieu du milieu du segment mobile BC tel que le cercle γ soit inscrit dans le triangle ABC .

Juillet 2005. Série 2.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les éléments suivants :

– le plan : $\alpha \equiv 7x + y - 7z = 0$,

– la première droite : $d \equiv 2x + 2 = -y - 3 = -2z + 4$,

– la seconde droite : $p \equiv x + 1 = -2y - 6 = 2z - 4$,

On vous demande de déterminer le(s) point(s) D appartenant à la droite d et le(s) point(s) P appartenant à la droite p afin que le segment de droite de DP soit de longueur $3\sqrt{2}$ et soit parallèle au plan α .

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère le triangle ABC .

Les deux premiers sommets sont $A = (2; 0)$ et $B = (-2; 0)$.

Le troisième sommet C est mobile et se déplace sur la droite $x + y = 3$.

On vous demande de déterminer l'équation du lieu de l'intersection des trois hauteurs du triangle.

Septembre 2005.

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère les éléments suivants :

– le cercle C passant par les points $A = (1, 0)$ et $B = (0, 2)$,

– le cercle C' dont l'équation est $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$.

On vous demande de déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle \mathcal{C} afin qu'il soit orthogonal au cercle \mathcal{C}' . Deux cercles sont dits orthogonaux s'ils se coupent et si leurs tangentes respectives en un point commun sont orthogonales.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les deux droites :

$$p \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$q \equiv \begin{cases} y - x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ces deux droites se coupent avec un angle droit en un point A .

On vous demande de donner les équations paramétriques de toutes les droites qui s'appuient sur p et q en formant un triangle isocèle et dont la distance à A soit égale à $2\sqrt{2}$.

Juillet 2006. Série 1.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les éléments suivants :

- le cercle : $\gamma \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$,
- et la droite d passant par le point $A = (2 ; 0 ; 0)$ et de vecteur directeur $(1 ; 1 ; 1)$.

On vous demande de déterminer toutes les sphères contenant le cercle γ et tangentes à la droite d .

2. On considère une table de billard de forme circulaire dont le centre est l'origine du repère orthonormé Oxy du plan et dont le rayon est $R = 1$ m. A partir d'une position $(a ; 0)$ de cette table, on met en mouvement une boule dans une direction $(b ; 1)$. Les paramètres a et b sont des réels positifs quelconques. Inévitablement, la boule va rebondir sur le bord de la table selon la règle de l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion. Tous les frottements sont négligés et la boule aura donc un mouvement perpétuel.

En fonction des paramètres du problème, on vous demande de déterminer l'équation cartésienne de la limite de la surface de la table qui ne sera jamais atteinte par la bille. On s'intéresse, d'abord, au cas général. Ensuite, une discussion rapide des cas particuliers remarquables peut être effectuée.

Juillet 2006. Série 2.

1.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les éléments suivants :

- les deux points $A = (1 ; 2 ; 3)$ et $B = (2 ; -1 ; 4)$,
- le plan $\alpha \equiv 4x + 7y - 4z - 9 = 0$.

On vous demande de calculer l'équation du plan passant par A et B et perpendiculaire au plan α .

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère les éléments suivants :

- le point : $P \equiv (-4; 0)$,
 - le cercle γ de centre $(-4; 2)$ et d'équation $4x^2 + 4y^2 + 32x + my + 7 - 3m = 0$,
- où m est un paramètre réel. On vous demande de :

1. déterminer le rayon du cercle,
2. déterminer l'équation cartésienne du lieu des points M tels que la distance MP vaut k fois la distance MT avec k un réel strictement positif quelconque et T le point de contact d'une des tangentes à γ issues de M .
3. discuter la nature du lieu en fonction des valeurs possibles de k .

Septembre 2006.

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère deux points mobiles A et B qui présentent les caractéristiques suivantes. Ils sont toujours alignés avec le point fixe O et le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} est une constante positive :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = k > 0$$

Sachant que A se déplace sur la droite verticale $x = 2$, déterminer le lieu de B en fonction de k .

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, une surface est représentée par l'équation :

$$2yz + 4x - 2y - z = 0$$

On coupe cette surface par le plan $x + y = k$: l'intersection entre le plan et la surface est appelée section de la surface par le plan.

1. Quelle doit être la valeur de k afin que la section se réduise à deux droites ?
2. Déterminer une représentation sous forme d'équations cartésiennes pour ces deux droites.
