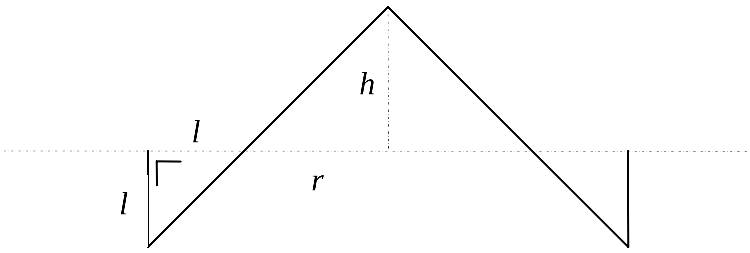
Juillet 2006, Série 1

1. Dans un trapèze ABCD, la base AD, de longueur constante a, est fixe et la base BC, parallèle à AD, a une longueur constante b. Le point B est à une distance constante c du point A. On appelle E le point de concours des droites AB et CD et M le point de concours des diagonales du trapèze. On demande

(1) de dessiner proprement et rigoureusement (ex. dessin des parallèles) les données du problème ;
(2) de déterminer le lieu du point E lorsque l'on varie la position du segment BC, d'expliquer votre démarche et de construire graphiquement le lieu de E;
(3) de faire de même pour le lieu du point M;

---

2. Des enfants réalisent un château de sable de forme conique de hauteur h et de rayon $r = h$, voir figure. Pour ce faire, ils creusent autour du château une tranchée de profondeur l et de largeur l, dont la section est également représentée sur la figure. Le sable constituant le château est intégralement prélevé de la tranchée. On vous demande de calculer la hauteur du château de sable pour une tranchée de profondeur $l = 1$. (Note : les longueurs des segments sur la figure ne correspondent pas à la solution du problème !)



Juillet 2006, Série 2

1. On donne un triangle ABC fixé. On considère un second triangle AB'C', semblable à ABC, et ayant le sommet A en commun. Le point D est l'intersection entre les droites CC' et BB'. On demande :

(4) de dessiner proprement et rigoureusement les données du problème ;
(5) de démontrer que les triangles AB'B et AC'C sont semblables ;
(6) de déterminer le lieu du point D lorsque l'on varie la position de C' et B' (aidez vous de la propriété démontrée en (2)), d'expliquer votre démarche et de construire le lieu de D.

---

2. On demande à des ingénieurs de concevoir un réservoir fermé destiné à contenir un liquide dangereux. Le réservoir conique est creusé dans le sol avec le sommet en bas et la base en haut. La hauteur du réservoir est notée h, et le rayon de la base est $r_c = h/2$. Pour pouvoir contrôler que la contenance de ce réservoir ne dépasse jamais un certain niveau critique, les ingénieurs ont imaginé le système de contrôle suivant. Un ballon sphérique de rayon $r = r_c/5$ et de densité égale à la moitié de la densité du liquide est introduit dans le réservoir (le ballon s'enfonce donc de moitié dans le liquide). Grâce à un système de capteurs, le remplissage s'arrête lorsque le ballon entre en contact avec la plaque supérieure du réservoir. On vous demande d'estimer la fraction volumique de liquide dans le réservoir, càd le rapport du volume de liquide sur le volume total du réservoir.

Septembre 2006

1. Soit un triangle ABC de base BC fixe. On demande le lieu du pied de la médiane partant du sommet C:

a) dans le cas où le côté AC a une longueur constante;
b) dans le cas où l'angle en A est constant.

Vous expliquerez votre démarche au moyen d'un ou plusieurs dessins clairs et rigoureux reprenant les données du problème et les lieux trouvés.

---

2. Un producteur de liqueurs traditionnelles vend des carafes coniques contenant non seulement la liqueur mais également un fruit, ce dernier conférant deux avantages : un aspect esthétique apprécié des clients et une économie sur la quantité de liquide à y introduire. La technique consiste à faire grandir le fruit dans la carafe. Le fruit grandit en gardant toujours la même forme et atteint sa taille finale lorsque les parois de la carafe l'empêchent de grandir davantage. Le producteur chercher à savoir s'il doit préférer des fruits de forme sphérique ou de forme cubique* pour optimiser son gain. Les carafes ont le diamètre de la base de longueur égale à la génératrice du cône. La question revient donc à comparer les volumes des deux fruits. (Sans calculette, il vous sera nécessaire de réaliser un calcul approximatif pour décider.)

****