

**Juillet 2008. Série 1.**

---

1. Calculez les deux racines complexes (en fonction du paramètre réel  $a$ ) de l'équation suivante :

$$z^2 + (a + 2i)z - \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right) - i = 0$$

où  $i$  est l'unité (la particule) imaginaire (ou encore  $i^2 = -1$ ).

Ensuite, quelle valeur donner au paramètre réel  $a$ , pour qu'une de ces racines soit purement imaginaire ?

-----

2. Etablissez la condition d'existence dans  $\Re$  de l'expression :

$$\sqrt{1 - \left(x - \frac{2}{x}\right)^4}$$

-----

3. Soit un polynôme réel  $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 5$  (coefficient de  $x^4$  et terme indépendant connus). Déterminez ses coefficients sachant que :

- $P(x)$  est divisible par  $(x^2 - x - 1)$
  - Le reste de la division de  $P(x)$  par  $(x + 1)$  est égal à 9
- 

4. Deux avions volent dans des directions opposées : l'un fait le trajet de Bruxelles à Rio, l'autre le trajet en sens inverse. La longueur du trajet est de 9300 km (*cfr. :Google Earth*).

Celui qui a décollé de Rio vers Bruxelles a quitté son point de départ 3 heures AVANT le moment de décollage de celui qui vole vers Rio. Pour le calcul on supposera que ces avions volent chacun à vitesse constante mais que celles-ci ne sont pas nécessairement égales à cause des vents dominants.

Ces avions se croisent quelque part sur le trajet. Après cette rencontre, l'avion qui vole vers Bruxelles met encore 2h pour achever son trajet alors que celui qui vole vers Rio met encore 6h.

Déterminez la distance entre Bruxelles et le point de rencontre.

**Juillet 2008. Série 2.**

---

1. Résoudre dans les réels, l'équation suivante :

$$(3^x - 5)^2 = 3^{2x-1} - 11$$

-----

2. Résoudre dans les réels, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x - |y + 1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$$

-----

3. Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante :

$$1 - \sqrt{\frac{x+1}{2x+1}} > \sqrt{\frac{4-x}{2x+1}}$$

-----

4. Un groupe de cinq étudiants dispose de cinq jours pour réaliser un projet (travail de groupe). Ils disposent d'un local dans lequel se trouve l'équipement nécessaire et chaque jour deux étudiants y travaillent pour faire avancer le projet. Le gestionnaire des locaux désire savoir combien d'heures le groupe a occupé le local pour CHAQUE jour de la semaine (du lundi au vendredi). Il dispose des informations suivantes :

- Il sait que Catherine a été la plus courageuse et a largement contribué au succès du projet en y travaillant 18 heures.
- Mathilde a travaillé 14 heures et Noémie 10 heures, c'est-à-dire deux heures de moins que Grégoire.
- Quant à Jacques, il ne s'est vraiment pas investi beaucoup dans le travail de groupe puisqu'il a travaillé trois fois moins que Catherine !
- De plus, il sait que Catherine et Mathilde étaient présentes le lundi, Noémie et Mathilde le mardi, Noémie et Jacques le mercredi, Jacques et Grégoire le jeudi, et Catherine et Grégoire le vendredi.

**Septembre 2008.**

---

1. Trouvez deux nombres réels  $x$  et  $y$ , tels que leur somme soit égale à leur produit, et aussi égale à la différence de leur carrés.

-----

2. Cherchez les conditions sur  $m$  un paramètre réel pour que les racines réelles  $x_1$  et  $x_2$  de l'équation

$$\frac{mx}{m-1} + \frac{m+1}{x} = x + 1$$

obéissent à la condition suivante :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2m + 1$$

-----

3. Résoudre dans les réels, l'équation suivante :

$$x\sqrt{x-3} = 2x - 4$$

Que valent ces racines ?

-----

4. Les parlementaires d'un pays sont amenés à voter POUR ou CONTRE une proposition de loi importante.

Après présentation de la proposition de loi et de ses motivations, chaque parlementaire présent exprime son choix POUR ou CONTRE la proposition (il n'y a ni vote nul ni vote blanc). On souhaite savoir quel est le nombre total de parlementaires présents, quel le nombre de ceux-ci qui ont voté POUR ainsi que le nombre ayant voté CONTRE. La loi a-t-elle été adoptée ?

On dispose des informations suivantes : lorsque l'on compte le nombre de bulletins POUR et que l'on y ajoute un bulletin de vote, on peut faire trois tas identiques avec les bulletins ; chacun de ces tas a la même taille que chacun des quatre tas identiques obtenus en rajoutant un bulletin de vote aux bulletins CONTRE, ou encore que chacun des cinq tas identiques obtenus en enlevant seize bulletins de vote de l'ensemble des bulletins de vote (exprimés POUR ou CONTRE).

\*\*\*\*\*