

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, Session Juillet 2005

Nom	
Prénom	
Matricule	

Question 1

1. Calculer :

$$I = \int_0^2 x\sqrt{x+1}dx$$

2. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = x - \sqrt{ax^2 + bx + c}$.
(On discutera en fonction de a)

3. Démontrer que la fonction $f(x) = x|x|$ est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit P un point de la courbe représentative de la fonction $y = e^x$. La tangente en P à cette courbe coupe en H l'axe des abscisses. Démontrer que la projection orthogonale du segment HP sur l'axe des abscisses a une longueur constante.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, Session Juillet 2005

Nom	
Prénom	
Matricule	

Question 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

et soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- A.**
1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 2. Préciser les équations des asymptotes de C .
 3. Tracer la courbe C .
- B.**
1. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y = m$. Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de Δ et de C .
 2. Pour tout $m > \sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de C .
Soit I le milieu du segment $[AB]$.
Montrer que, quand m décrit l'intervalle $]\sqrt{2}, +\infty[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, Session Juillet 2005

Nom	
Prénom	
Matricule	

Question 3

Il y a deux sources de lumière sur une ligne droite. La source A est située à la position $(-1,0)$ et la source B est située à la position $(+1,0)$. La source B est α fois plus lumineuse que la source A. On peut supposer que l'intensité de la lumière diminue comme l'inverse du carré de la distance à la source. On peut supposer aussi que l'intensité totale à un point donné est la somme des intensités de toutes les sources qui illuminent ce point. Quel est alors le point sur la ligne entre A et B avec l'intensité de lumière minimale, en fonction de α ?

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 2, Session Juillet 2005

Nom	
Prénom	
Matricule	

Question 1

1. Vérifier l'égalité :

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

2. Calculer :

$$\int_0^a \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

3. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

4. Démontrer que la fonction $f(x) = |x| \sin x$ est dérivable en $x = 0$ et donner la valeur de $f'(0)$.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 2, Session Juillet 2005

Nom	
Prénom	
Matricule	

Question 2

A. On munit le plan P d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x} \cos x$.

1. Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et tracer la courbe représentative Γ de f sur cet intervalle.
2. Calculer l'aire limitée par Γ , les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, et l'axe des abscisses.

B. On se propose d'étudier l'intersection de la courbe Γ avec la droite Δ d'équation $y = x$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de points d'intersection de Γ et de Δ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
2. Soit φ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\varphi(x) = e^{-x} \cos x - x$$

- a) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- b) Etudier les variations de φ .
- c) En déduire qu'il existe un réel unique α de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $e^{-\alpha} \cos \alpha = \alpha$ (c'est-à-dire tel que $f(\alpha) = \alpha$).
- d) Prouver que $\alpha < 1$.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 2, Session Juillet 2005

Nom	
Prénom	
Matricule	

Question 3

Supposons qu'il y a un barrage qui maintient un lac. Le barrage est fait de terre battue. Il y a un défaut de construction au fond du barrage. Il arrive donc un jour qu'un trou se forme au fond du barrage. Le barrage commence ensuite à se vider de plus en plus vite, à cause du trou qui s'aggrandit avec le temps. Voici les variables impliquées:

- V : le volume du lac (en m^3).
- s : la surface du trou (en m^2).
- d : le débit d'eau qui passe par le trou (en m^3/s).

Nous faisons maintenant l'hypothèse que le comportement de ce système est donné par les propriétés suivantes, qu'on suppose vraies au début de la vidange du lac¹. Le débit d'eau est proportionnel à la surface du trou. L'aggrandissement de la surface du trou par unité de temps (c'est-à-dire, la dérivée) est proportionnel au débit d'eau. La surface du trou au temps initial ($t = 0$) est $s_0 > 0$. La diminution du volume du lac par unité de temps est donnée par le débit d'eau. Exprimez alors le volume du lac en fonction du temps.

1. Les propriétés données ici ne correspondent pas forcément avec le comportement en réalité.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, Session septembre 2005

Nom	
Prénom	
Matricule	

Question 1

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x - x - 3.$$

1. Etudier les variations de la fonction f .
2. Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que (\mathcal{C}) admet une asymptote D dont on précisera l'équation. Préciser la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à cette asymptote.
3. Construire (\mathcal{C}) .
4. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine limité par (\mathcal{C}) , D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$ avec $\alpha < 0$. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.
5. Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $I = [0, +\infty[$.
 - (a) Montrer que f_1 est une bijection de I sur un intervalle que l'on précisera.
 - (b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} et construire sa courbe représentative dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - (c) Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, Session septembre 2005

Nom	
Prénom	
Matricule	

Question 2

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$, $x \in [0, 1[$.
Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - x + 1$. Exprimer $f(-x)$ et $f(-x) + f(x)$. Quel élément de symétrie sa courbe représentative dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ présente-t-elle ?
3. On pose $I = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$ et $J = \int_0^\pi x \sin^2 x \, dx$.
Calculer I . En utilisant un changement de variable approprié, montrer que $J = \pi \times I - I$.
En déduire la valeur de J .
4. Calculer $I_\alpha(a) = \int_1^a \frac{1}{t^\alpha} \, dt$ en fonction de α et de a où α et a sont deux réels strictements positifs.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, Session septembre 2005

Nom	
Prénom	
Matricule	

Question 3

Un grand bol en verre a une hauteur de 0.2m, mesuré à l'intérieur du bol. A la hauteur x à partir du fond du bol, son diamètre intérieur est \sqrt{x} (en mètres). Un pot de confiture avec forme cylindrique a une hauteur intérieure de 0.1m et un diamètre intérieur de 0.1m. Combien de pots de confiture pleins de confiture de groseilles sont nécessaires (à l'unité près) pour remplir le grand bol jusqu'au $\frac{2}{3}$ de sa hauteur avec de la confiture de groseilles ?