ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, juillet 2011

Prénom et nom : ________________________________ Numéro : ____________

Question 1

1. Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par
$$f(x) = \ln\Big(\ln\big(\ln x\big)\Big) .$$

2. Calculez la limite
$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x .$$

3. Calculez une primitive de la fonction f définie par
$$f(x) = x^3 e^{-x^2} .$$

4. La fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$
est croissante et bijective sur l'intervalle [0 1].
Soit f^{-1} la fonction réciproque de f sur ce même intervalle. Calculez l'intégrale définie
$$\int_0^1 f^{-1}(t)\mathrm{d}t$$
à l'aide du changement de variable $t = f(x)$.

PRÉNOM ET NOM : ______________________________ NUMÉRO : __________

Question 2

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)\,.$$

(Il est possible de répondre indépendamment à chacune des trois parties de cette question.)

1. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Démontrez que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.
2. Etudiez les variations de f et tracez la courbe $\mathcal{C}$ (on précisera le domaine de définition de f, ses éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et décroissance et les extrema, mais on n'étudiera pas la concavité, ni les points d'inflexion).
3. On cherche à présent à savoir si f admet un point fixe, c'est-à-dire un réel x tel que $f(x) = x$.
   (a) Soit G la fonction définie par $G(x) = f(x) - x$. Calculez $\lim_{x\to-\infty} G(x)$.
   (b) Démontrez que, pour tout réel x strictement positif, on a
   $$G(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - 1\right).$$
   et déduisez-en la valeur de $\lim_{x\to+\infty} G(x)$.
   (c) Prouvez, à l'aide des points (a) et (b), que la fonction f admet un point fixe.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 1, juillet 2011

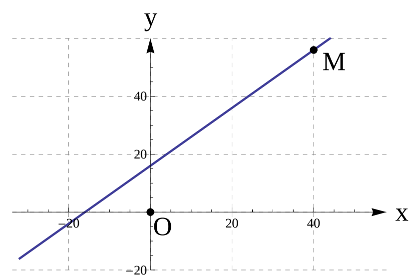
Prénom et nom : ______________________ Numéro : __________

Question 3 – Un raccourci par la route

Dans le plan Oxy, où toutes les coordonnées sont exprimées en kilomètres, vous vous trouvez à l'origine O. Une route passe à proximité, et son équation est $y = x + \alpha$, où α est un paramètre réel.

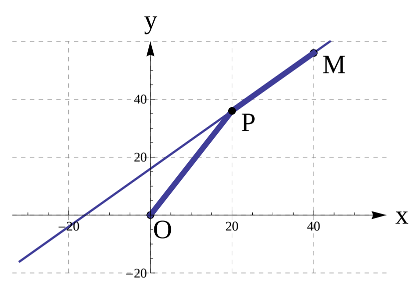
Vous souhaitez vous rendre le plus rapidement possible au point M de coordonnées $(40, 40+\alpha)$, situé sur la route (voir figure ci-contre, tracée pour un certain α).

Votre vitesse de déplacement est égale à 60km/h partout dans le plan, sauf sur la route, où vous atteignez 100km/h.



Pour minimiser votre temps de parcours, vous allez d'abord, depuis l'origine, vous diriger en ligne droite vers un certain point P de la route, puis suivre la route jusqu'au point M.
(ce chemin est représenté en gras sur la figure ci-contre).

On cherche la position du point P, sur la route, qui minimise la durée totale du trajet entre O et M.



1. Soit x l'abscisse du point P à déterminer. Calculez en fonction de l'abscisse x et du paramètre α les distances $|OP|$ et $|PM|$, puis la durée totale du trajet jusque M.
   (Vous pouvez supposer que l'abscisse x est toujours plus petite que 40, l'abscisse de M.)
2. Calculez en fonction du paramètre α les coordonnées du point P conduisant à une durée minimale pour le trajet. Justifiez soigneusement votre réponse.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 2, juillet 2011

Prénom et nom : ______________________ Numéro : __________

Question 1

1. Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par
$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln(x) - 1}{\ln(x) + 1}} \,.$$
2. Calculez une primitive de la fonction f définie par
$$f(x) = \operatorname{tg}\big(\sin x\big) \cdot \cos x \,.$$
3. Calculez la limite
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^6 + x^3} - x^3 \,.$$
4. Démontrez, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $x^2 = e^x$ admet au moins une solution réelle.

PRÉNOM ET NOM : ______________________________ NUMÉRO : ____________

Question 2

On considère la fonction g définie par

$$g(x) = 1 - x - e^{-2x}\,.$$

1. Étudiez les variations de g et tracez sa courbe représentative (on précisera le domaine de définition de g, ses éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et décroissance et les extrema, mais on n'étudiera pas la concavité, ni les points d'inflexion).
2. Déduisez du point précédent qu'il existe un et un seul réel a strictement positif tel que $g(a) = 0$, puis démontrez que a appartient à l'intervalle ouvert $]\frac{\ln 2}{2}\;\; 1[$.
3. Étudiez le signe de g.

   On considère à présent la fonction f définie sur l'intervalle $[0\;\; +\infty[$ par

   $$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}\,.$$

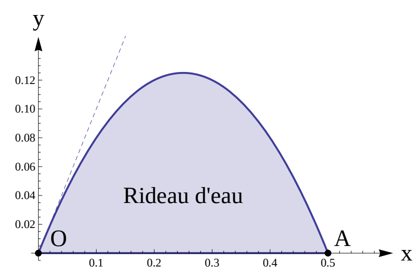
4. Démontrez l'égalité $f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}\,g\left(\frac{1}{x}\right)$.
5. Déterminez à l'aide des points précédents les domaines de croissance et de décroissance de f.

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Série 2, juillet 2011

Prénom et nom : ______________________ Numéro : ____________

Question 3 – Un grand rideau d'eau

Un irrigateur crée un rideau d'eau plan et perpendiculaire au sol. Dans ce plan Oxy, représenté ci-contre, le rideau d'eau, émis à partir de l'origine, est compris entre le sol, d'équation $y = 0$, et la parabole d'équation



$$y = f(x) \qquad \text{avec } f(x) = -\frac{x^2}{\cos^2\theta} + x \operatorname{tg}\theta\,,$$

où θ est un paramètre strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1. Calculez la pente de la tangente à la parabole à l'origine. Que représente le paramètre θ ?
2. Calculez, en fonction de θ, les coordonnées du point d'intersection A entre le sol et la parabole.
3. Calculez, en fonction de θ, la surface du rideau d'eau.
4. Calculez la valeur du paramètre θ pour laquelle la surface du rideau d'eau est maximale.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Septembre 2011

Prénom et nom : ______________________________ Numéro : ____________

Question 1

1. Calculez la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} .$$
2. Calculez la valeur de l'intégrale définie
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \, \cos x}{\sqrt{\cos 2x}} \mathrm{d}x .$$
3. Soit f la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = |x|^3.$$
Est-elle dérivable à l'origine ? Justifier.

Prénom et nom : ________________________________ Numéro : ____________

Question 2

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$$

sur le domaine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Calculez les limites $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.
2. Déterminez les éventuelles asymptotes.
3. Calculez f' et f'' puis dressez un tableau des variations de f contenant
   (a) les racines et le signe de f', les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f,
   (b) les racines et le signe de f'', les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f.
4. Tracez le graphe de f.
5. Discutez en fonction du paramètre réel u le nombre de solutions de l'équation

$$(x+2)e^{\frac{1}{x}} = u\ .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil
Université catholique de Louvain
Analyse – Septembre 2011

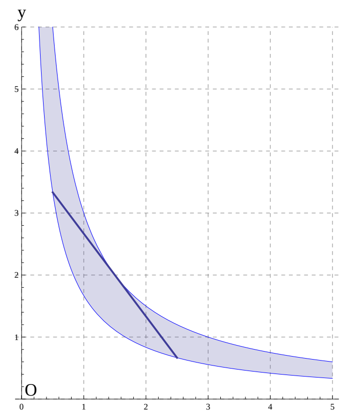
Prénom et nom : ______________________________ Numéro : ____________

Question 3 – Il était un petit navire

On a représenté ci-contre, dans le plan Oxy, une rivière dont les rives intérieure (au dessus sur la figure) et extérieure (en dessous) ont pour équations respectives

$$y = \frac{3}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{5}{3x} \qquad (\text{pour } x > 0)\ .$$

On considère un navire assimilé à un segment rectiligne. On cherche à calculer la longueur maximale permettant encore à ce navire de naviguer le long de cette rivière. Pour cela, on considère la situation extrême représentée sur la figure : un navire tangent à la rive intérieure et dont les deux extrémités se situent sur la rive extérieure.



Soit a l'abscisse du point de tangence, à déterminer.

1. Calculez l'équation de la tangente à la rive intérieure.
2. Calculez les coordonnées des deux extrémités du navire puis calculez le *carré* de sa longueur.
3. Calculez la valeur de a conduisant au minimum du carré de la longueur du navire, puis la longueur minimale possible pour le navire.