Examen de trigonométrie et calcul numérique

Admission UCL juillet 2011

L'examen de trigonométrie et calcul numérique se passe en deux parties :

1. Première partie :

Durée : de 9h30 à 11h00.

Cette partie comporte 3 questions, auxquelles vous devez répondre exclusivement sur les feuilles du questionnaire (y compris le verso). L'emploi de feuilles de brouillon est interdit. En cas de nécessité, demandez une feuille supplémentaire aux surveillants, qui vous en fourniront. L'emploi de calculettes est également interdit pour cette partie. A 11h00, les feuilles concernant cette partie doivent *obligatoirement* être remises aux surveillants.

2. Deuxième partie:

Durée: de 11h00 à 12h00.

Cette partie comporte une seule question (question 4), qui vous sera remise à 11h00. Pour cette question, vous pouvez utiliser une calculette (une calculette scientifique non programmable suffit), ainsi que des feuilles de brouillon (feuilles blanches, éventuellement quadrillées) de votre choix.

Recommandations générales :

N'oubliez pas d'inscrire vos nom, prénom et numéro d'inscription sur chaque feuille utilisée.

Les précisions sur les questions sont à poser aux responsables de cet examen: Mr D. Flandre et P. Van Dooren, qui circuleront dans les différents auditoires. En cas de nécessité, faites-les appeler par les surveillants.

La résolution des questions ne requiert que l'utilisation des formules de base, rappelées ci-dessous. Toute autre formule utilisée sera explicitée, et les éléments de sa démonstration seront indiqués.

Formules de base de la trigonométrie :

La formule fondamentale :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

Formules donnant :

- $\sin(-a)$, $\cos(-a)$, $\mathrm{tg}(-a)$; $\sin(\pi \pm a)$, $\cos(\pi \pm a)$, $\mathrm{tg}(\pi \pm a)$,
- $\sin(\pi/2 \pm a)$, $\cos(\pi/2 \pm a)$, $\mathrm{tg}(\pi/2 \pm a)$,
- $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\mathrm{tg}(a \pm b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\mathrm{tg}\, 2a$; $1 \pm \cos 2a$,
- $\sin a$, $\cos a$, $\mathrm{tg}\, a$ en fonction de $\mathrm{tg}\, a/2$.
- produits et sommes de cos, sin et tg.

Les transformations de $a \cos x + b \sin x$ en $E \cos(x+p)$.

Les relations entre les angles et côtés d'un triangle rectangle et d'un triangle quelconque (règles des sinus et règles en cosinus).

Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL juillet 2011

Nom :
Prénom :
N° :

Question 1 :

Dans un demi-cercle de diamètre AB (dont la longueur est 2R et le milieu est O), on inscrit un trapèze MPQN (dont M et N sont des points de AB et les perpendiculaires à AB en M et N coupent le demi-cercle en P et Q respectivement).

- Représentez la figure géométrique.
- Trouvez l'angle MOP (noté α) en fonction de R, l'aire du trapèze (S) et l'angle QOP (noté β). (Simplifiez la relation au maximum.)
- Calculez l'angle α pour R = 1 dm, S = $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ dm^2 et β = 60°.

Trigonometrie et calcul numérique Admission UCL juillet 2011

Nom :
Prénom :
N° :

Question 2 :

Pour quelles valeurs de x comprises dans l'intervalle $[0,\Pi/2]$, la fonction f(x) suivante est-elle strictement positive ?

$$f(x) = 2\sin^2 3x + \sin^2 6x - 2$$

Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL juillet 2011

Nom : Prénom : N° :

Question 3 :

Pour les affirmations suivantes, cochez laquelle de ces affirmations est la vraie.

- Un triangle qui ne contient pas le centre du cercle dans lequel il est inscrit, est

  obtus ☐ rectangle ☐ aigu ☐

- Dans l'intervalle –π/4 < x < π/4, l'équation $3\sin x = 8\sin^3 x$ possède exactement

  1 solution ☐ 2 solutions ☐ 3 solutions ☐

- L'expression $\dfrac{\mathrm{tg}(x - y) + \mathrm{tg}\, y}{1 - \mathrm{tg}(x - y)\mathrm{tg}\, y}$ est identiquement égale à

  $\mathrm{tg}\, x$ ☐ $\mathrm{tg}\, y$ ☐ $\mathrm{tg}\,(x + y)$ ☐

- Si dans un triangle ABC on a $\sin^2 A > \sin^2 B + \sin^2 C$, alors

  A < 90° ☐ A = 90° ☐ A > 90° ☐

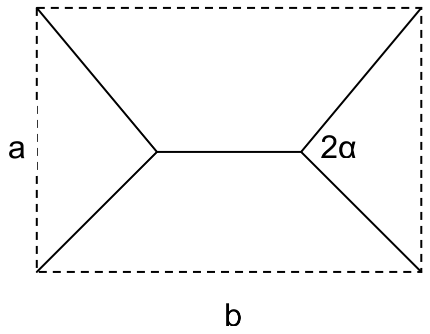
Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL juillet 2011

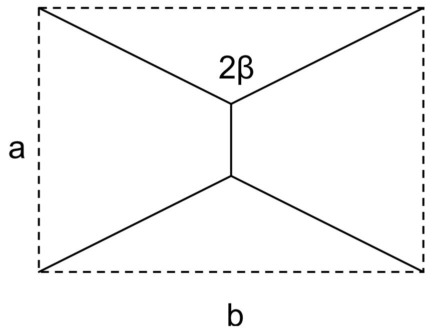
Nom :
Prénom :
N° :

Question 4 :

On cherche à relier quatre villes, qui forment les coins d'un rectangle de dimensions a fois b, par des routes de façon à ce que la somme des longueurs des tronçons (c.-à-d. les lignes en traits pleins), soit de longueur minimale.

Par souci de simplicité nous cherchons des solutions d'un des deux types suivants (avec deux points d'intersections intérieurs)





où les deux dessins sont symétriques par rapport à l'horizontale aussi bien que par rapport à la verticale.

1/ Pour chacun des deux dessins, donnez les bornes que doivent satisfaire les angles α et β, en fonction de a et b.

2/ Pour chacun des deux dessins, donnez les longueurs totales des tronçons, en fonction de a, b, α d'une part et en fonction de a, b et β d'autre part.

3/ Donnez les dérivées de ces longueurs totales par rapport à α et β et trouvez les solutions optimales de α et β à un degré près.

4/ Pour a=20km et b=30km, calculez la longueur des différents tronçons du choix optimal, à un km près.

Examen de trigonométrie et calcul numérique

Admission UCL sept. 2011

L'examen de trigonométrie et calcul numérique se passe en deux parties :

1. Première partie :

Durée : de 9h30 à 11h00.

Cette partie comporte 3 questions, auxquelles vous devez répondre exclusivement sur les feuilles du questionnaire (y compris le verso). L'emploi de feuilles de brouillon est interdit. En cas de nécessité, demandez une feuille supplémentaire aux surveillants, qui vous en fourniront. L'emploi de calculettes est également interdit pour cette partie. A 11h00, les feuilles concernant cette partie doivent *obligatoirement* être remises aux surveillants.

2. Deuxième partie:

Durée: de 11h00 à 12h00.

Cette partie comporte une seule question (question 4), qui vous sera remise à 11h00. Pour cette question, vous pouvez utiliser une calculette (une calculette scientifique non programmable suffit), ainsi que des feuilles de brouillon (feuilles blanches, éventuellement quadrillées) de votre choix.

Recommandations générales :

N'oubliez pas d'inscrire vos nom, prénom et numéro d'inscription sur chaque feuille utilisée.

Les précisions sur les questions sont à poser aux responsables de cet examen: Mr D. Flandre et P.-A. Absil, qui circuleront dans les différents auditoires. En cas de nécessité, faites-les appeler par les surveillants.

La résolution des questions ne requiert que l'utilisation des formules de base, rappelées ci-dessous. Toute autre formule utilisée sera explicitée, et les éléments de sa démonstration seront indiqués.

Formules de base de la trigonométrie :

La formule fondamentale :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

Formules donnant :

sin (-a), cos (-a), tg (-a); sin (π±a), cos (π±a), tg (π±a),

sin (π/2±a), cos (π/2±a), tg (π/2±a),

sin (a±b), cos (a±b), tg (a±b), sin 2a, cos 2a, tg 2a; 1 ± cos 2a,

sin a, cos a, tg a en fonction de tg a/2.

produits et sommes de cos, sin et tg.

Les relations entre les angles et côtés d'un triangle rectangle et d'un triangle quelconque (règles des sinus et règles en cosinus).

Trigonométrie et calcul numérique Admission UCL septembre 2011

Nom :
Prénom :
N° :

Question 1 :

On dispose d'une pièce ABCD de forme losange dont l'angle en A est α et la longueur de la diagonale AC est notée $\boldsymbol{d}$.

- Représentez graphiquement le cercle le plus grand que l'on peut découper dans cette pièce et exprimez mathématiquement son aire en fonction de $\boldsymbol{d}$ et α.
- Estimez cette aire au cm^2 près, pour $\boldsymbol{d} = 12$ cm et $\alpha = 60°$.
- Calculez l'expression mathématique de la chute (c.-à-d. l'aire restant de la pièce losange après découpe du cercle) en fonction de $\boldsymbol{r}$, le rayon du cercle, et de α.
- Calculez l'angle α qui minimise cette chute pour $\boldsymbol{r}$ fixe.

Nom :
Prénom :
N° :

Question 2 :

Pour quelles valeurs de x comprises dans l'intervalle $[0, 3\Pi/2]$, la fonction f(x) suivante est-elle strictement positive ?

$$f(x) = \sqrt{3}.\cos^2 x - \sqrt{3}.\sin^2 x + 2.\sin x.\cos x - \sqrt{3}.\cos x + \sin x$$

Nom :
Prénom :
N° :

Question 3 :

Pour les affirmations suivantes, cochez laquelle de ces affirmations est la vraie.

- La somme des angles A, B, C et D d'un quadrilatère ABCD dont les segments AB et CD s'intersectent

  est toujours égale à 240 degrés ☐

  est toujours égale à 360 degrés ☐

  n'est pas constante ☐

- Dans l'intervalle $0 < x < \pi/2$, l'équation $\frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 1$ admet strictement

  0 solution ☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐

- L'expression $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b}$ est identiquement égale à

  $\operatorname{tg}(a+b)$ ☐ $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$ ☐ $2\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$ ☐

- Si dans un triangle ABC rectangle en A, les côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C) satisfont $b = \sqrt{3}c$, alors

  $B < 75°$ ☐ $B = 75°$ ☐ $B > 75°$ ☐

Nom :
Prénom :
N° :

Question 4 :

A partir d'un point A de la surface de la terre, supposée parfaitement sphérique de rayon **r**, on considère la calotte sphérique formée par les points B tels que le chemin le plus court entre A et B le long de la surface de la terre est de longueur strictement inférieure à **d**. On construit une tour de hauteur **h** à la verticale du point A.

1/ Faites un croquis de la situation et indiquez-y les quantités **r**, **d** et **h** ainsi que les variables intermédiaires que vous utiliserez dans vos calculs.

2/ Donnez des formules qui permettent de calculer, en fonction des variables **r** et **d**, la valeur minimale de **h** telle que le sommet de la tour soit en vue directe de tous les points de la calotte.

3/ Calculez la hauteur **h** à un mètre près pour les ensembles de données suivantes : **r**=6371km, **d**=100km et **r**=6371km, **d**=15000km.