Examen de trigonométrie et calcul numérique

Admission UCL juillet 2005

L'examen de trigonométrie et calcul numérique se passe en deux parties :

1. Première partie :

Durée : de 9h30 à 11h00.

Cette partie comporte 3 questions, auxquelles vous devez répondre exclusivement sur les feuilles du questionnaire (y compris le verso). L'emploi de feuilles de brouillon est interdit. En cas de nécessité, demandez une feuille supplémentaire aux surveillants, qui vous en fourniront. L'emploi de calculettes est également interdit pour cette partie. A 11h00, les feuilles concernant cette partie doivent *obligatoirement* être remises aux surveillants.

2. Deuxième partie:

Durée: de 11h00 à 12h00.

Cette partie comporte une seule question (question 4), qui vous sera remise à 11h00. Pour cette question, vous pouvez utiliser une calculette (une calculette scientifique non programmable suffit), ainsi que des feuilles de brouillon (feuilles blanches, éventuellement quadrillées) de votre choix.

Recommandations générales :

N'oubliez pas d'inscrire vos nom, prénom et numéro d'inscription sur chaque feuille utilisée.

Les précisions sur les questions sont à poser aux responsables de cet examen: Mr J.-F. Thimus et P. Van Dooren, qui circuleront dans les différents auditoires. En cas de nécessité, faites-les appeler par les surveillants.

La résolution des questions ne requiert que l'utilisation des formules de base, rappelées ci-dessous. Toute autre formule utilisée sera explicitée, et les éléments de sa démonstration seront indiqués.

Formules de base de la trigonométrie :

La formule fondamentale :

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

Formules donnant :

sin (-a), cos (-a), tg (-a); sin (π±a), cos (π±a), tg (π±a),

sin (π/2±a), cos (π/2±a), tg (π/2±a),

sin (a±b), cos (a±b), tg (a±b), sin 2a, cos 2a, tg 2a; 1 ± cos 2a,

sin a, cos a, tg a en fonction de tg a/2.

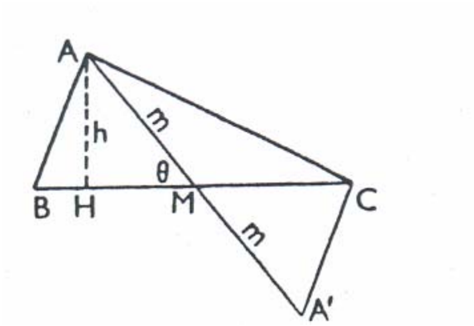
produits et sommes de cos, sin et tg.

Les transformations de a cos x + b sin x en E cos (x+p).

Les relations entre les angles et côtés d'un triangle rectangle et d'un triangle quelconque (règles des sinus et règles en cosinus

Question 1 :

Dans un triangle ABC de surface S, AM est la médiane de longueur *m et* θ est l'angle AMB.



Démontrer les relations suivantes :

- $4m^2 - a^2 = 4bc\cos A$

$$S = \frac{4m^2 - a^2}{8}\tan A$$

Question 2 :

Les angles d'un triangle ABC vérifient la relation suivante :

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$$

Démontrer que le triangle est rectangle.

Question 3 :

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

- Le plus petit angle d'un triangle est inférieur ou égal à 60°.

  vrai ☐ faux ☐

  vrai si :

- Pour $\pi/4 < x < \pi/2$, on a tg $2x >$ tg x

  vrai ☐ faux ☐

  vrai si :

- Pour $x \neq k\pi/2$ on a , $(\text{tg } x - \sin x)/(\text{tg } x + \sin x) > 0$

  vrai ☐ faux ☐

  vrai si :

- Dans un triangle rectangle en A, l'aire S du triangle est égal à $S = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B$.

  vrai ☐ faux ☐

  vrai si :

Question 4 :

Je vole dans un ballon (O) et je mesure les distances a=OA, b=OB et c=OC à trois points A, B et C au sol. Le triangle ABC est équilatéral de côté d=1km. Les distances sont a=b=2km et c=2,1km.

1/ Si O' est ma projection orthogonale au sol, calculez les distances a', b' et c' de O' aux trois points de référence A, B et C.

2/ Faites un croquis de la situation pour expliquer vos calculs.

On suppose la terre plate pour simplifier le problème.

2^{me} Série

Question 1 :

Dans le trapèze ABCD, les bases sont AB = a et CD = b ; les côtés non parallèles sont BC = c et DA = d ; les diagonales sont AC = m et BD = n.

Question 2 :

Si $a+b+c+d=2\pi$, vérifier que

$$\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{a+c}{2}$$

1. connaissant les quatre côtés, calculer les angles.
2. connaissant les bases et les diagonales, calculer les angles et les côtés non parallèles.

Question 3 :

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition nécessaire qui rende l'affirmation vraie :

- Le plus grand angle d'un triangle est supérieur ou égal à 60°.

vrai ☐ faux ☐
vrai si :

- Pour $0 < x < \pi$, $\cos 2x + \sin 2x +1 > 0$

vrai ☐ faux ☐
vrai si :

- Dans un triangle ABC on a $tg^2(A/2) = tg^2(B/2)$

vrai ☐ faux ☐
vrai si :

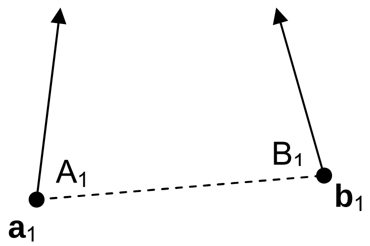
- Un triangle est isocèle si une de ses bissectrices est également une médiane

vrai ☐ faux ☐

vrai si :

Question 4 :

Deux bateaux **a** et **b** naviguent à la même vitesse, mais dans deux directions différentes. Ils s'observent l'un l'autre et mesurent chacun l'angle entre sa propre trajectoire et la direction sous laquelle il observe l'autre bateau : au temps t_1 par exemple, les bateaux se trouvent en $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{b}_1$ et les angles A_1 et B_1 mesurés sont indiqués dans le dessin suivant.



Au temps t_2 les bateaux ont parcouru chacun 10 km dans leurs directions initiales et ils se trouvent en $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{b}_2$ et mesurent de la même façon deux nouveaux angles A_2 et B_2.

1/ Démontrez que les angles satisfont $A_1+B_1 = A_2+B_2$.

2/ Faites un croquis de la situation pour expliquer ce résultat.

3/ Trouvez comment calculer les distances $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2$ à partir des angles A_1, B_1, A_2, B_2.

4/ Faites le calcul pour les angles $A_1=80°$, $B_1=70°$, $A_2=85°$, $B_2=65°$.