

Systèmes Hamiltoniens : un aperçu variationnel

Denis Bonheure* et Michel Willem

31 janvier 2007

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Applications et exemples	5
1.2	Notations	7
2	Principes variationnels	8
2.1	Éléments de calcul des variations	8
2.2	Espaces de Sobolev	10
2.3	Principes variationnels de la mécanique	13
3	Solutions périodiques	16
3.1	Minimisation et période fixée	16
3.2	Minimisation et énergie fixée	17
3.3	Minimax et période fixée	19
3.4	Minimax et énergie fixée	21
4	Solutions homoclines	23
4.1	Systèmes autonomes du second ordre	25
4.2	Systèmes périodiques du second ordre	27
4.3	Compacité et réversibilité	28
4.4	Systèmes Lagrangiens singuliers	30
4.5	Systèmes Hamiltoniens périodiques	32
5	Solutions hétéroclines	33
5.1	Systèmes autonomes ou périodiques du second ordre	33
5.2	Connections entre orbites périodiques	36
6	Solutions multi-bosses et dynamique chaotique	37
6.1	Homoclines et hétéroclines multi-bosses	37
6.2	Un pendule forcé chaotique	39
7	Conclusion	41

*Chargé de recherches du F.N.R.S.

1 Introduction

Selon Héron d'Alexandrie, la trajectoire d'un rayon de lumière réfléchi par un miroir est plus courte que toute autre trajectoire réfléchie. L'égalité entre l'angle d'incidence et l'angle de réflexion se déduit immédiatement du principe de Héron sachant que la droite est le chemin le plus court entre deux points.

Selon Descartes, la lumière se propage d'autant plus vite que le milieu est *plus* dense. La loi de la réfraction est une conséquence du principe de Descartes. En 1657, Fermat retrouve la même loi, en supposant que la lumière se propage d'autant plus vite que le milieu est *moins* dense et que le temps de parcours est minimum.

En 1696, Jean Bernoulli pose le problème de la brachistochrone. Comme le note Hadamard :

“Lorsque Jean Bernoulli posa au monde savant le problème de la courbe le long de laquelle un point pesant descend le plus vite possible d'un point donné A à un point donné B , force lui fut de considérer non pas seulement une courbe déterminée, donnée ou inconnue, mais l'ensemble des courbes que l'on peut imaginer tracées entre A et B , puisque la courbe cherchée doit être comparée à toutes les autres du point de vue du temps de descente employé par le mobile.”

En 1744, Maupertuis énonce le principe de moindre action. L'action le long d'une trajectoire de A à B est définie par l'intégrale curviligne

$$m \int_A^B |v| ds,$$

où m représente la masse d'une particule et v sa vitesse. S'il existe un potentiel V , l'énergie est conservée :

$$m \frac{|v|^2}{2} + V = h.$$

Cent ans plus tard, Jacobi définit l'action

$$\int_A^B \sqrt{h - V} ds.$$

La particule décrit une courbe géodésique relative à la métrique $\sqrt{h - V} ds$. Le principe de Jacobi est purement géométrique. Il faut reparamétriser les courbes géodésiques pour retrouver les solutions des équations de Newton

$$m\ddot{u} = -\nabla V(u).$$

Soient $T(t, x, y) = \frac{1}{2}A(t, x)y \cdot y$ l'énergie cinétique et $V(t, x)$ l'énergie potentielle d'un système mécanique. L'évolution du système est déterminée par les *équations de Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}$$

et par les *conditions initiales*

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0.$$

D'après le principe de Hamilton (1834) les trajectoires du système sont les extrémals de l'action

$$\int_a^b (T - V) dt.$$

En effet, les équations de Lagrange ne diffèrent pas des *équations d'Euler*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Il faut alors imposer *les conditions aux limites*

$$u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

Parmi toutes les trajectoires de A à B , le système choisira celle qui rend stationnaire la différence des moyennes des énergies cinétique et potentielle :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b T dt - \frac{1}{b-a} \int_a^b V dt.$$

Le Lagrangien

$$L(t, x, y) = T(t, x, y) - V(t, x)$$

et le Hamiltonien

$$H(t, x, z) = \max_{y \in \mathbb{R}^N} (z \cdot y - L(t, x, y))$$

sont en dualité :

$$L(t, x, y) = \max_{z \in \mathbb{R}^N} (y \cdot z - H(t, x, z)).$$

Les équations d'Euler-Lagrange conduisent aux équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial z}(t, q, p), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, q, p). \end{aligned}$$

Si le système est indépendant du temps, le Hamiltonien d'une solution est indépendant du temps :

$$H(q(t), p(t)) = c.$$

Depuis les cours de Cauchy à l'École Polytechnique se pose le problème de l'existence en analyse. En 1870, Weierstrass réfute le "principe de Dirichlet" par un contre-exemple célèbre qui montre la nécessité de distinguer l'infimum et le minimum.

Le principe de Dirichlet consiste à résoudre le problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N et $g \in C(\partial\Omega)$, en minimisant l'intégrale de Dirichlet

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

sous les contraintes $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = g$. Toute solution du problème de minimisation est solution du problème de Dirichlet. Mais comme l'observent Prym et Hadamard, les conditions $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et $u|_{\partial\Omega} = g$ peuvent ne pas être compatibles!

Le contre-exemple de Weierstrass est le suivant.

Exemple 1.1. *Considérons le problème*

(P) *minimiser* $\int_0^1 t^2 (\dot{u}(t))^2 dt$ *sous les contraintes* $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ *et* $u \in C^1([0, 1])$.

La suite définie par

$$u_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{\arctan(n)}$$

est telle que $u_n(0) = 0$, $u_n(1) = 1$ et

$$\int_0^1 t^2 (\dot{u}(t))^2 dt \leq \frac{4}{n\pi} \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^2} ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

L'infimum de (P), égal à 0, n'est donc pas atteint.

Dès lors se posent trois questions distinctes :

- a) existence,
- b) conditions nécessaires,
- c) conditions suffisantes.

Considérons, par exemple, l'action

$$\mathcal{J}(u) = \int_a^b L(t, u, \dot{u}) dt$$

définie sur un espace X de fonctions admissibles. Une condition nécessaire pour un minimum est fournie par les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Afin de résoudre ces équations, il suffit de prouver l'existence du minimum de \mathcal{J} . C'est la méthode directe du calcul des variations due à Hilbert (1900), à Lebesgue (1902) et à Tonelli (1915).

Plus généralement, un réel c est valeur critique de l'action, s'il existe $u \in X$ tel que

$$\mathcal{J}(u) = c, \quad \delta \mathcal{J}(u) = 0,$$

où $\delta \mathcal{J}(u)$ est la variation première de l'action en u . Les valeurs critiques sont construites par minimax

$$c = \inf_{B \in \mathcal{B}} \sup_{u \in B} \mathcal{J}(u),$$

où \mathcal{B} est une classe de parties de X , par exemple une classe de chemin dans X . La méthode de minimax remonte à G. D. Birkhoff. Lusternik et Schnirelmann ont défini un invariant topologique, la catégorie, qui minore le nombre de points critiques d'une fonction régulière définie sur une variété compacte régulière (sans bord). La classe \mathcal{B} est définie par l'ensemble des compacts dont la catégorie est supérieure à k . L'entier k est lui-même inférieure ou égal à la catégorie de la variété. L'extension en dimension infinie est due à Krasnoselski, à Palais et à Smale.

Décrivons un résultat très simple, le lemme d'Ambrosetti-Rabinowitz. La fonction φ est continûment dérivable sur un espace de Banach X . Elle possède un minimum local qui n'est pas un minimum global. Admet-elle un autre point critique? Dans le cas où $X = \mathbb{R}^2$, la fonction φ représente l'altitude et le minimum local est situé au fond d'une vallée. Versons de l'eau dans cette vallée. Le point où l'eau commencera à déborder sera un nouveau point critique de φ .

L'exemple suivant, dû à Brezis et à Nirenberg, prouve que ce raisonnement n'est pas valide.

Exemple 1.2. Soit $\varphi(x, y) = x^2 + (1-x)^3 y^2$. Il est clair que 0 est un minimum local de φ et que $\inf_{\mathbb{R}^2} \varphi = -\infty$. Toutefois 0 est le seul point critique de φ , comme le montrent les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= 2x - 3(1-x)^2 y^2 = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) &= 2(1-x)^3 y = 0. \end{aligned}$$

Par minimax, il est possible de construire une valeur c , différente du minimum local et une suite $(u_n)_n \subset X$ telles que

$$\varphi(u_n) \rightarrow c, \quad \varphi'(u_n) \rightarrow 0.$$

Une condition de compacité, due à Palais et à Smale, permet alors de passer à la limite et d'obtenir une solution de

$$\varphi(u) = c, \quad \varphi'(u) = 0.$$

Cette condition est évidemment violée dans le contre-exemple de Brezis et Nirenberg.

Nous renvoyons à [19, 20] pour l'histoire du principe de moindre action.

Dans ce dossier, nous décrivons certains résultats d'existence de solutions périodiques, d'homoclines et d'hétéroclines par des méthodes de minimisation et de minimax. La section 2 contient des éléments du calcul des variations, d'espaces de Sobolev et de principes de la mécanique utilisés par la suite.

1.1 Applications et exemples

Les systèmes Hamiltoniens sont à la base de la description des systèmes physiques et des systèmes commandés largement utilisés dans les applications en mécanique, en automatique ou en robotique. Décrivons deux systèmes simples et les Lagrangiens correspondants.

Le pendule simple est un point P de masse m qui se déplace dans un plan vertical sous l'action de la pesanteur et qui est relié à un point d'attache fixe par une barre rigide de longueur ℓ et de masse négligeable.

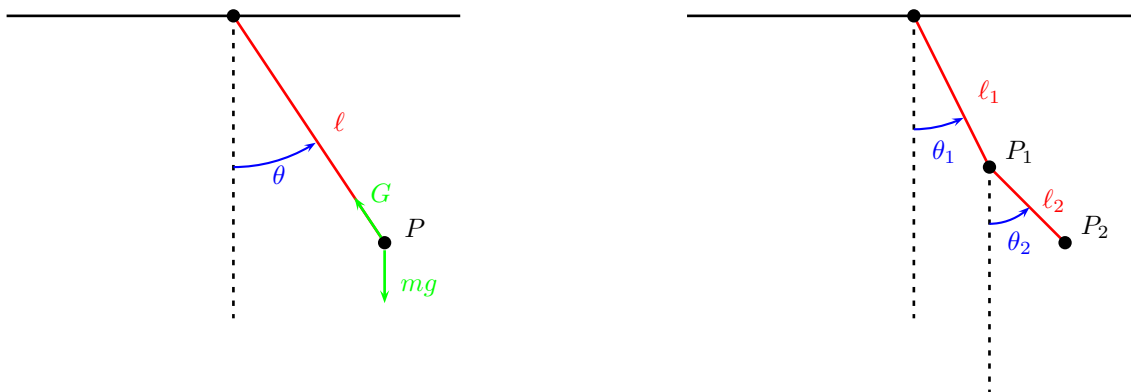


FIG. 1 – À gauche, un pendule simple. À droite, un pendule double

Dans un système de coordonnées x_1, x_2 dans le plan vertical considéré, tel que l'origine O soit le point d'attache et la force de pesanteur soit dirigée selon l'axe Ox_1 , les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= mg - G \cos \theta, \\ m\ddot{x}_2 &= -G \sin \theta, \end{aligned}$$

où G est la norme de la force de liaison exercée par la barre sur le point P et $\theta \in]-\pi, \pi[$ est tel que

$$x_1 = \ell \cos \theta, \quad x_2 = \ell \sin \theta.$$

Les équations du mouvement se réduisent à l'équation scalaire

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

On peut arriver à cette équation en écrivant le Lagrangien

$$L(x, y) = T(y) - V(x) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l} \cos x,$$

et en calculant l'équation d'Euler-Lagrange, ou en dérivant les équations de Hamilton à partir de l'Hamiltonien $H(x, z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{g}{l} \cos x$.

Un grand nombre de systèmes mécaniques (en robotique par exemple) incluent des mouvements pendulaires. Dans la modélisation de ces systèmes, on utilise en général des pendules couplés. Un exemple de couplage consiste à attacher un ressort fixé au milieu de chaque tige ou reliant les points d'attaches. Pour modéliser un bras articulé, on utilisera des modèles plus élaborés de pendules multiples forcés. Ici, on entend par pendule double, un pendule à l'extrémité duquel on accroche un autre pendule, voir la figure 1. Le lecteur vérifiera que le Lagrangien d'un pendule double est donné par

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ell_1^2 y_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2 y_2^2 + m_2\ell_1\ell_2 y_1 y_2 \cos(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g\ell_1 \cos x_1 + m_2g\ell_2 \cos x_2,$$

où m_1 désigne la masse d'un point P_1 relié à un point d'attache fixe par une barre rigide de longueur ℓ_1 , et m_2 la masse d'un point P_2 attaché par une barre rigide de longueur ℓ_2 à P_1 . Ce Lagrangien est un exemple classique auquel s'applique le type de résultats développés dans ce dossier.

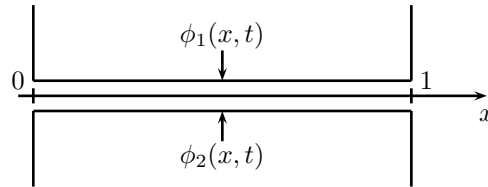


FIG. 2 – Jonction de Josephson. Le saut de la fonction d'onde est donné par $\phi = \phi_1 - \phi_2$.

La jonction de Josephson est constituée de deux supra-conducteurs à très basse température séparés par un intervalle étroit. Le saut de la fonction d'onde correspondante est décrit par l'équation de Sine-Gordon

$$\phi_{tt} + \sigma\phi_t - \phi_{xx} + \sin \phi = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Deux cas sont particulièrement intéressants. Dans le premier, une différence de potentiel électrique constante est maintenue dans l'intervalle et on mesure le courant induit. On impose dès lors les conditions aux limites

$$\phi_t|_{x=0} = V, \quad \phi_x|_{x=1} = H,$$

où V est la différence de potentiel maintenue dans l'intervalle et H un champ magnétique appliqué. Le courant induit est déterminé par une moyenne temporelle de ϕ_x .

Dans le second cas, on maintient un courant constant à travers l'intervalle séparant les deux supra-conducteurs et on mesure la différence de potentiel électrique créée par le passage du courant. On impose cette fois les conditions aux limites

$$\phi_x|_{x=0} = H, \quad \phi_x|_{x=1} = I,$$

où I est le courant maintenu dans l'intervalle. La fonction ϕ_t est généralement très oscillante. Lorsque cette fonction est périodique, on peut en calculer la moyenne temporelle ce qui donne une indication de la différence de potentiel électrique dans la jonction.

Les expériences montrent que le temps de réponse d'une jonction de Josephson est extrêmement court et que la dissipation de puissance est très faible. Une jonction de Josephson est donc idéale comme composant de commutation, par exemple dans les circuits des ordinateurs qui dépendent de la vitesse de commutation on-off.

La discrétisation du problème conduit au système différentiel

$$\ddot{u} + \sigma \dot{u} + Au - f(u) = b,$$

où $u = [u_1, \dots, u_N]^T$, $f(u) = [\sin u_1, \dots, \sin u_N]^T$, $b = \frac{1}{h}[H, 0, \dots, 0, H + I]$ et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La composante $u_j(t)$ correspond à $\phi((j-1/2)h, t)$, où $h = 1/N$. Les équations discrétisées possèdent une interprétation mécanique simple. Elles décrivent un système de N pendules couplés linéairement qui oscillent perpendiculairement à un axe horizontal et qui sont soumis à la force extérieure b .

1.2 Notations

Dans ce dossier, nous utilisons les notations suivantes :

– le produit scalaire usuel de $x, y \in \mathbb{R}^N$ est défini par

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^N x_j y_j;$$

– la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^N$ est définie par

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^N x_j^2 \right)^{1/2};$$

– la dérivée d'une fonction u d'une variable réelle t est notée \dot{u} ou $\frac{du}{dt}$;

– l'espace des fonctions u mesurables sur I telles que $\int_I |u(t)|^p dt < \infty$ est noté $L^p(I)$;

– le gradient est noté ∇ ;

– soit $H(t, x, z)$ un Hamiltonien, nous posons

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial z} \right).$$

2 Principes variationnels

2.1 Éléments de calcul des variations

Dans cette section, nous considérons un *Lagrangien*

$$L : (t, x, y) \mapsto L(t, x, y).$$

Définitions 2.1. Soit $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. L'action associée à L est définie sur $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ par

$$\mathcal{J}(u) = J_L(u) = \int_a^b L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt.$$

La variation première de \mathcal{J} en u dans la direction $h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ est définie par

$$\delta\mathcal{J}(u)(h) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathcal{J}(u + \varepsilon h).$$

Lemme 2.2. Pour tout $h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, nous avons

$$\delta\mathcal{J}(u)(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, u(t), \dot{u}(t)) \cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), \dot{u}(t)) \cdot \dot{h}(t) \right) dt.$$

Démonstration. En dérivant sous le signe somme, nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{J}(u)(h) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_a^b L(t, u(t) + \varepsilon h(t), \dot{u}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)) dt \\ &= \int_a^b \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(t, u(t) + \varepsilon h(t), \dot{u}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, u(t), \dot{u}(t)) \cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), \dot{u}(t)) \cdot \dot{h}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

□

Nous interpréterons l'annulation de $\delta\mathcal{J}(u)$ en utilisant le *lemme fondamental du calcul des variations*. Nous posons

$$C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N) = \{u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \mid u(a) = u(b) = 0\}.$$

Lemme 2.3. Soient $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R}^N)$ tels que, pour tout $h \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$,

$$\int_a^b f(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot \dot{h}(t) dt = 0.$$

Alors $g \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ et $\dot{g} = f$.

Démonstration. Soit $h \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$. En intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(g(t) \cdot \dot{h}(t) - \int_a^t f(s) ds \cdot \dot{h}(t) \right) dt + \left[\int_a^t f(s) ds \cdot h(t) \right]_a^b \\ &= \int_a^b \left(g(t) - \int_a^t f(s) ds \right) \cdot \dot{h}(t) dt. \end{aligned}$$

Posons

$$v(t) = g(t) - \int_a^t f(s) ds, \quad \bar{v} = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(t) dt \quad \text{et} \quad h(t) = \int_a^b (v(s) - \bar{v}) ds.$$

Comme $h \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, nous obtenons

$$0 = \int_a^b v(t) \cdot \dot{h}(t) dt = \int_a^b |v(t)|^2 dt.$$

Mais alors $v = 0$ sur $[a, b]$, ce qui implique $\dot{g} = f$. □

Le théorème suivant est une conséquence directe des deux lemmes précédents.

Théorème 2.4. *Soit $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ tel que, pour tout $h \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, $\delta\mathcal{J}(u)(h) = 0$. Alors, pour tout $a \leq t \leq b$,*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), \dot{u}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, u(t), \dot{u}(t)).$$

□

Remarque 2.5. *A priori, la fonction*

$$t \rightarrow \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), \dot{u}(t))$$

est continue. La dérivabilité de cette fonction est une propriété remarquable de régularité.

Théorème 2.6. *Soit $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ tel que, pour tout $h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, $\delta\mathcal{J}(u)(h) = 0$. Alors*

$$\frac{\partial L}{\partial y}(a, u(a), \dot{u}(a)) = \frac{\partial L}{\partial y}(b, u(b), \dot{u}(b)) = 0. \quad (2.1)$$

Démonstration. Nous déduisons du Lemme 2.2 et du Théorème 2.4 que, pour tout $h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), \dot{u}(t)) \cdot h + \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), \dot{u}(t)) \cdot \dot{h} \right) dt \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), \dot{u}(t)) \cdot h \right]_a^b. \end{aligned}$$

Il est aisé de conclure. □

Considérons les *conditions aux limites périodiques*. Posons

$$C_T^1([0, T]; \mathbb{R}^N) = \{u \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^N) \mid u(0) = u(T)\}.$$

Théorème 2.7. *Soit $u \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^N)$ tel que, pour tout $h \in C_T^1([0, T]; \mathbb{R}^N)$, $\delta\mathcal{J}(u)(h) = 0$. Alors*

$$\frac{\partial L}{\partial y}(0, u(0), \dot{u}(0)) = \frac{\partial L}{\partial y}(T, u(T), \dot{u}(T)). \quad (2.2)$$

Démonstration. Nous déduisons du Lemme 2.2 et du Théorème 2.4 que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), \dot{u}(t)) dt \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial y}(t, u(t), \dot{u}(t)) \right]_0^T. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.8. Les conditions de Dirichlet

$$u(a) = u(b) = 0,$$

ou les conditions périodiques

$$u(0) = u(T),$$

imposées dans les définitions des espaces fonctionnels, sont des conditions aux limites essentielles. Les conditions (2.1) ou (2.2), déduites de l'annulation de la variation première, sont des conditions aux limites naturelles.

2.2 Espaces de Sobolev

La méthode directe du calcul des variations consiste à résoudre l'équation

$$\delta\mathcal{J}(u) = 0, \quad u \in X,$$

en prouvant l'existence d'un minimum de \mathcal{J} sur X . Les théorèmes d'existence se démontrent dans les espaces de Sobolev.

Fixons un intervalle ouvert non nécessairement borné $I =]a, b[$. L'espace des *fonctions d'essai* sur I se définit par

$$\mathcal{D}(I) := \{h \in C^\infty(I) \mid \text{il existe un compact } K \subset I \text{ tel que } h|_{I \setminus K} = 0\}.$$

Définition 2.9. L'espace de Sobolev $H^1(I)$ est défini par

$$H^1(I) := \{u \in L^2(I) \mid \exists v \in L^2(I) \text{ tel que, } \forall h \in \mathcal{D}(I), \int_I u(t)\dot{h}(t) dt = - \int_I v(t)h(t) dt\}.$$

L'élément v est nommé *dérivée faible* de u et est noté \dot{u} . L'espace $H^1(I)$ est muni du produit scalaire

$$(f|g)_{H^1} = \int_I \left(f(t)g(t) + \dot{f}(t)\dot{g}(t) \right) dt.$$

Remarques 2.10. (a) L'unicité de la dérivée faible résulte du théorème de l'annulation : soit $w \in L^2(I)$ tel que, pour tout $h \in \mathcal{D}(I)$,

$$\int_I w(t)h(t) dt = 0.$$

Alors $w = 0$. (Voir [38]).

(b) Dans le cas où $u \in H^1(I) \cap C^1(I)$, les dérivées faibles et classiques coïncident.

Théorème 2.11. Soit $u \in H^1(I)$. Alors il existe $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tel que, pour tout $x, y \in \bar{I}$,

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_x^y \dot{u}(t) dt.$$

Démonstration. Voir [4], Théorème VIII.2. □

Dans la suite, nous confondrons systématiquement u et son représentant continu \tilde{u} . Nous noterons \rightharpoonup la convergence faible dans un espace de Hilbert. Rappelons que toute suite bornée dans un espace de Hilbert contient une sous-suite faiblement convergente.

Théorème 2.12 (Théorème de Rellich). Soient I borné et $(u_n)_n \subset H^1(I)$. Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1(I)$, alors

$$\begin{aligned} \dot{u}_n &\rightharpoonup \dot{u} \quad \text{dans } L^2(I), \\ u_n &\rightarrow u \quad \text{uniformément sur } \bar{I}. \end{aligned}$$

Démonstration. L'application linéaire

$$A : H^1(I) \rightarrow L^2(I) : u \mapsto \dot{u}$$

est continue. Dès lors $\dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}$ dans $L^2(I)$.

Par le Théorème de Banach-Steinhaus [4, 38],

$$c = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{H^1} < +\infty.$$

Nous déduisons alors du théorème précédent que pour tout $x, y \in \bar{I}$,

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq |x - y|^{1/2} \|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq c|x - y|^{1/2}.$$

Le Théorème d'Ascoli permet de conclure. \square

Exemple 2.13. Si I n'est pas borné, la convergence uniforme de u_n n'a pas lieu en général. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $u \neq 0$. Posons $u_n(t) = u(t+n)$. Alors $u_n \rightharpoonup 0$ dans $H^1(\mathbb{R})$ mais $\|u_n\|_\infty \equiv \|u\|_\infty > 0$.

Définition 2.14. Soient $-\infty < a < b < +\infty$. L'espace $H_0^1(]a, b[)$ est l'adhérence de $C_0^1(]a, b[)$ dans $H^1(]a, b[)$.

Définition 2.15. Soit $0 < T < \infty$. L'espace $H_T^1(]0, T[)$ est l'adhérence de $C_T^1(]0, T[)$ dans $H^1(]0, T[)$.

Rappelons deux inégalités élémentaires :

Proposition 2.16. (a) (Inégalité de Poincaré.) Pour tout $u \in H_0^1(]a, b[)$,

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \|\dot{u}\|_{L^2}^2.$$

(b) (Inégalité de Wirtinger.) Pour tout $u \in H_T^1(]0, T[)$ tel que $\int_0^T u(t) dt = 0$,

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \|\dot{u}\|_{L^2}^2.$$

\square

La notion de convexité jouera un rôle fondamental dans la suite.

Définitions 2.17. Une fonction $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x \neq y$, et pour tout $0 < \lambda < 1$,

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y).$$

La fonction F est dite strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte.

Prouvons un résultat de semi-continuité inférieure faible.

Théorème 2.18. Soient $F \in C(\mathbb{R}^N)$ une fonction convexe telle que

$$c = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{|F(x)|}{|x|^2} < +\infty,$$

et $(u_n)_n \subset L^2(I, \mathbb{R}^N)$ une suite telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^N)$. Alors

$$\int_I F(u(t)) dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_I F(u_n(t)) dt.$$

Démonstration. a) Supposons tout d'abord que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^N)$. Dans ce cas, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ et $f \in L^2(I, \mathbb{R}^N)$ tels que, presque partout sur I ,

$$u_{n_k}(t) \rightarrow u(t) \quad \text{et} \quad |u_{n_k}(t)| \leq f(t).$$

(Voir [4, 38].) Dès lors, presque partout sur I ,

$$F(u_{n_k}(t)) \rightarrow F(u(t)) \quad \text{et} \quad |F(u_{n_k}(t))| \leq c(f(t))^2 \in L^1(I, \mathbb{R}^N).$$

Le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue montre que

$$\int_I F(u(t)) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I F(u_{n_k}(t)) dt.$$

b) Considérons à présent le cas général. D'après le Théorème de Banach-Saks [38], il existe une suite $(v_n)_n$ extraite de la suite $(u_n)_n$ telle que

$$w_n = \frac{v_1 + \dots + v_n}{n} \rightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(I, \mathbb{R}^N),$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I F(v_n(t)) dt = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_I F(u_n(t)) dt.$$

L'étape a) implique l'existence d'une sous-suite $(w_{n_k})_k$ telle que

$$\begin{aligned} \int_I F(u(t)) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I F(w_{n_k}(t)) dt \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \left(\int_I F(v_1(t)) dt + \dots + \int_I F(v_{n_k}(t)) dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I F(v_n(t)) dt \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_I F(u_n(t)) dt. \end{aligned}$$

□

Exemple 2.19. Si F n'est pas convexe, le théorème précédent n'est pas valide. La suite $(u_n)_n$ définie par $u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt)$ est orthonormée dans $L^2(]0, \pi[)$. L'inégalité de Bessel montre que $u_n \rightarrow 0$. Si $F(x) = -x^2$, nous obtenons

$$0 = \int_0^\pi F(0) dt > \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi F(u_n(t)) dt = -1.$$

Remarque 2.20. Si $u \in H^1(]a, b[; \mathbb{R}^N)$, la dérivée \dot{u} n'est pas nécessairement bornée et le calcul de

$$\delta \mathcal{J}(u)(h) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{J}(u + \varepsilon h)$$

n'est pas toujours possible. En effet, il n'est pas permis, en général, de dériver sous le signe somme, comme dans la preuve du Lemme 2.2.

Dans tous les exemples que nous allons traiter, la condition suivante est satisfaite : il existe $\gamma \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ telle que, pour tout $(t, x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$,

$$\left| \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, y) \right| + \left| \frac{\partial L}{\partial y}(t, x, y) \right| \leq \gamma(t, |x|)(|y| + 1).$$

Cette condition permet de dériver sous le signe somme et, par conséquent, d'étendre le Lemme 2.2 à $H^1(]a, b[, \mathbb{R}^N)$.

2.3 Principes variationnels de la mécanique

Considérons un *Lagrangien* de la mécanique classique

$$L(t, x, y) = T(t, x, y) - V(t, x).$$

L'énergie potentielle V est de classe C^1 . L'énergie cinétique, définie par

$$T(t, x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, x) y_i y_j, \quad (2.3)$$

est telle que pour tout $1 \leq i, j \leq N$,

$$a_{ij} \text{ est de classe } C^1 \text{ et } a_{ij} = a_{ji}, \quad (2.4)$$

il existe $0 < m < M$ tels que, pour tout t, x, y ,

$$m|y|^2 \leq T(t, x, y) \leq M|y|^2. \quad (2.5)$$

D'après le *principe de Hamilton*, si la variation première de l'action

$$\mathcal{J}(u) = \int_a^b (T(t, u(t), \dot{u}(t)) - V(t, u(t))) dt$$

est nulle, u est solution des *équations d'Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y}(t, u, \dot{u}) = \frac{\partial T}{\partial x}(t, u, \dot{u}) - \frac{\partial V}{\partial x}(t, u). \quad (2.6)$$

Définition 2.21. *Le Lagrangien L est conservatif s'il est indépendant de t .*

Théorème 2.22. *Soit L un Lagrangien conservatif. Alors l'énergie*

$$H = T(u, \dot{u}) + V(u)$$

de toute solution des équations d'Euler-Lagrange est indépendante du temps.

Démonstration. En utilisant (2.3) et (2.6), il est facile de vérifier que

$$\frac{d}{dt} (T(u, \dot{u}) + V(u)) = \frac{d}{dt} \left(\dot{u} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}(u, \dot{u}) - T(u, \dot{u}) + V(u) \right) = 0.$$

□

Lorsque le Lagrangien est conservatif, nous pouvons donc poser le problème de l'existence de solutions périodiques de *période fixée* ou d'*énergie fixée*. Dans le premier cas, la période intervient dans la définition des espaces fonctionnels de trajectoires admissibles. Dans le second cas, la période est inconnue.

Définissons la *transformée de Legendre-Fenchel*.

Définitions 2.23. *Une fonction $F \in C^1(\mathbb{R}^N)$ admissible est une fonction strictement convexe telle que*

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{F(y)}{|y|} = +\infty.$$

La transformée de Legendre-Fenchel d'une fonction admissible F est définie sur \mathbb{R}^N par

$$F^*(z) = \max_{y \in \mathbb{R}^N} (z \cdot y - F(y)).$$

Remarque 2.24. La fonction F^* est définie implicitement par

$$\nabla F(y) = z, \quad F^*(z) = z \cdot y - F(y).$$

Théorème 2.25. Soit $F \in C^1(\mathbb{R}^N)$ une fonction admissible. Alors F^* est admissible, $(F^*)^* = F$ et pour tout $y, z \in \mathbb{R}^N$,

$$z = \nabla F(y) \Leftrightarrow y = \nabla F^*(z).$$

Démonstration. Considérons le cas particulier d'une fonction quadratique

$$F(y) = \frac{1}{2} Ay \cdot y,$$

où A est une matrice symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$) et il existe $m > 0$ tel que, pour tout y ,

$$m|y|^2 \leq Ay \cdot y.$$

La fonction F^* est définie par

$$F^*(z) = z \cdot A^{-1}z - \frac{1}{2}z \cdot A^{-1}z = \frac{1}{2}z \cdot A^{-1}z.$$

De plus, nous avons

$$z = \nabla F(y) \Leftrightarrow z = Ay \Leftrightarrow y = A^{-1}z \Leftrightarrow y = \nabla F^*(z).$$

Le cas général est traité dans [22]. □

Définition 2.26. Soit

$$L(t, x, y) = T(t, x, y) - V(t, x)$$

un Lagrangien de la mécanique classique vérifiant (2.3), (2.4) et (2.5). Le Hamiltonien associé à L est défini par

$$H(t, x, z) = \max_{y \in \mathbb{R}^N} (z \cdot y - L(t, x, y)).$$

Observons que

$$L(t, x, y) = \max_{z \in \mathbb{R}^N} (y \cdot z - H(t, x, z)),$$

et

$$z = \frac{\partial}{\partial y} L(t, x, y) \Leftrightarrow y = \frac{\partial}{\partial z} H(t, x, z).$$

Écrivons les équations d'Euler-Lagrange sous la forme

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\partial}{\partial y} L(t, q(t), \dot{q}(t)), \\ \dot{p}(t) &= \frac{\partial}{\partial x} L(t, q(t), \dot{q}(t)). \end{aligned}$$

Nous obtenons alors les *équations d'Hamilton*

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{\partial}{\partial z} H(t, q(t), p(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial}{\partial x} H(t, q(t), p(t)). \end{aligned}$$

Définition 2.27. La matrice symplectique standard est définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_{\mathbb{R}^N} \\ \text{id}_{\mathbb{R}^N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $u = (q, p)$. Les équations d'Hamilton deviennent

$$J\dot{u}(t) = \nabla H(t, u(t)). \quad (2.7)$$

L'action correspondante à ce système est donnée par

$$\Psi(u) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} J\dot{u}(t) \cdot u(t) - H(t, u(t)) \right) dt.$$

Si le Hamiltonien est conservatif (c'est-à-dire si le Lagrangien correspondant l'est), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = \nabla H(u(t)) \cdot \dot{u}(t) = -\nabla H(u(t)) \cdot J\nabla H(u(t)) = 0.$$

L'énergie $H(u(t))$ d'une solution est donc constante.

Définition 2.28. L'orbite d'une solution u du système (2.7) est l'ensemble

$$\{u(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 2.29. Soient $H_i \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ et $c_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$S = H_1^{-1}(c_1) = H_2^{-1}(c_2),$$

et, pour tout $x \in S$,

$$\nabla H_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Alors les orbites des solutions périodiques des systèmes

$$J\dot{u} = \nabla H_i(u), \quad i = 1, 2,$$

sont identiques.

Démonstration. Considérons une solution périodique u_1 du système $J\dot{u} = \nabla H_1(u)$. Comme les vecteurs $\nabla H_1(u_1(t))$ et $\nabla H_2(u_1(t))$ sont normaux à S , il existe une fonction $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\nabla H_2(u_1(t)) = \lambda(t) \nabla H_1(u_1(t)).$$

Par hypothèse, nous avons

$$\lambda(t) = \frac{\nabla H_2(u_1(t)) \cdot \nabla H_1(u_1(t))}{|\nabla H_1(u_1(t))|^2}.$$

Posons

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{dt}{\lambda(t)}.$$

La fonction $u_2 = u_1 \circ \psi^{-1}$ est une solution périodique du système $J\dot{u} = \nabla H_2(u)$. □

Une généralisation naturelle de la notion de convexe est la notion d'étoilé.

Définition 2.30. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N contenant l'origine. L'ouvert Ω est étoilé si, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $0 < \lambda < 1$, $\lambda x \in \Omega$.

Soit $H^{-1}(c)$ le bord d'un étoilé. Pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, il existe un et un seul $\lambda(y) \geq 0$ tel que $y \in \lambda(y)S$. Nous posons $\bar{H}(y) = \lambda(y)^2$.

Proposition 2.31. *S'il existe une solution 1-périodique non nulle de*

$$J\dot{u} = \lambda \nabla \bar{H}(u), \quad \lambda > 0,$$

alors $S = H^{-1}(c)$ contient une orbite périodique de

$$J\dot{v} = \nabla H(v).$$

Démonstration. Soit $\mu \equiv \bar{H}(u(t)) > 0$. Posons

$$v(t) = u(t/\lambda)/\sqrt{\mu}.$$

La fonction v est périodique de période λ . Comme \bar{H} est positivement homogène de degré 2, pour tout t ,

$$v(t) \in \bar{H}^{-1}(1) = S.$$

Enfin, comme $\nabla \bar{H}$ est positivement homogène de degré 1,

$$J\dot{v}(t) = \frac{1}{\lambda\sqrt{\mu}} J\dot{u}(t/\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla \bar{H}(u(t/\lambda)) = \nabla \bar{H}(v(t)).$$

La proposition précédente permet de conclure. □

3 Solutions périodiques

3.1 Minimisation et période fixée

Considérons l'équation du pendule forcé avec les conditions aux limites périodiques

$$\ddot{u} + a \sin u = f(t), \tag{3.1}$$

$$u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0. \tag{3.2}$$

D'après le principe de Hamilton, si la variation première de

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{u}(t)|^2 + a \cos u(t) + f(t)u(t) \right) dt$$

est nulle, u est solution de (3.1). Supposons que $u \in H_T^1$ est telle que, pour tout $h \in H_T^1$,

$$\delta \mathcal{J}(u)(h) = 0.$$

Alors u vérifie les conditions aux limites essentielles $u(0) = u(T) = 0$ et, d'après le Théorème 2.7, les conditions aux limites naturelles $\dot{u}(0) = \dot{u}(T)$.

Si $\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \neq 0$, il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(-nf) = -\infty.$$

Nous chercherons donc à minimiser $\mathcal{J} : H_T^1 \rightarrow \mathbb{R}$ sous l'hypothèse $\bar{f} = 0$.

Théorème 3.1. *Soit $f \in C([0, T])$ telle que $\int_0^T f(t) dt = 0$. Alors il existe une solution u de (3.1)-(3.2) qui minimise \mathcal{J} sur H_T^1 .*

Démonstration. Soit $(u_n)_n \subset H_T^1$ une suite minimisante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_n) = \inf_{u \in H_T^1} \mathcal{J}.$$

Posons $\bar{u}_n = \frac{1}{T} \int_0^T u_n(t) dt$ et $\tilde{u}_n = u_n - \bar{u}_n$. Observons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{J}(u_n + 2k\pi) = \mathcal{J}(u_n). \quad (3.3)$$

En remplaçant u_n par $u_n + 2k_n\pi$ si nécessaire, nous pouvons supposer que $\bar{u}_n \in [0, 2\pi[$.

Nous déduisons à présent des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Wirtinger que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u_n) &\geq \frac{1}{2} \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 - aT - \|f\|_{L^2} \|\tilde{u}_n\|_{L^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 - aT - \frac{T^2}{4\pi^2} \|f\|_{L^2} \|\dot{u}_n\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dès lors, $(\dot{u}_n)_n$ est bornée dans L^2 et $(u_n)_n$ est bornée dans H_T^1 .

En passant éventuellement à une sous-suite, nous pouvons supposer que $u_n \rightharpoonup u$ dans H_T^1 et

$$\begin{aligned} \dot{u}_n &\rightharpoonup \dot{u} \quad \text{dans } L^2(]0, T[), \\ u_n &\rightarrow u \quad \text{uniformément sur } [0, T]. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\mathcal{J}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_n) = \inf_{u \in H_T^1} \mathcal{J}.$$

Donc u minimise \mathcal{J} et $\delta J(u) = 0$ sur H_T^1 , i.e. u est solution de (3.1)-(3.2). \square

Observons que si $f \equiv 0$, nous obtenons la solution périodique instable et constante $u \equiv \pi$. Dans la Section 3.3, nous découvrirons une seconde solution par minimax.

3.2 Minimisation et énergie fixée

Suivant l'approche de F. H. Clarke [6], nous prouverons le résultat suivant par *dualité*.

Théorème 3.2. Soient $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ et $S = H^{-1}(c)$ tels que

- a) S est le bord d'un compact strictement convexe dont l'intérieur contient 0,
- b) pour tout $y \in S$, $\nabla H(y) \neq 0$.

Alors S contient l'orbite d'une solution périodique du système $J\dot{u} + \nabla H(u) = 0$.

Pour chaque $y \in \mathbb{R}^N$, il existe un et un seul $\lambda(y) \geq 0$ tel que $y \in \lambda(y)S$. D'après la Proposition 2.29, nous pouvons supposer que $H(y) = (\lambda(y))^2$. Le lemme suivant est élémentaire.

Lemme 3.3. Sous les hypothèses a) et b) du Théorème 3.2, nous avons

- i) $H^{-1}(1) = S$,
- ii) $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$,
- iii) H est strictement convexe et positivement homogène de degré 2,
- iv) il existe $0 < \alpha < \beta$ tels que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{2N}$,

$$\alpha \frac{|y|^2}{2} \leq H(y) \leq \beta \frac{|y|^2}{2}.$$

□

La transformée de Legendre-Fenchel de H est définie sur \mathbb{R}^{2N} par

$$G(z) = \max_{y \in \mathbb{R}^{2N}} (z \cdot y - H(y)).$$

Nous déduisons du lemme précédent les propriétés fondamentales de G .

Lemme 3.4. *Sous les hypothèses a) et b) du Théorème 3.2, nous avons*

- i) $G \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$,
- ii) G est strictement convexe et positivement homogène de degré 2,
- iii) pour tout $z \in \mathbb{R}^{2N}$,

$$\frac{1}{\beta} \frac{|z|^2}{2} \leq G(z) \leq \frac{1}{\alpha} \frac{|z|^2}{2}.$$

□

Considérons le problème de minimisation

(\mathcal{P}) minimiser $\int_0^1 G(\dot{v}(t)) dt$ sur X sous la contrainte $\int_0^1 J\dot{v}(t) \cdot v(t) dt = 2$,

où $X = H_0^1(]0, 1[, \mathbb{R}^{2N})$. Nous allons prouver l'existence d'une solution de (\mathcal{P}) et en déduire l'existence d'une orbite périodique sur S .

Lemme 3.5. *Sous les hypothèses a) et b) du Théorème 3.2, il existe une solution de (\mathcal{P}).*

Démonstration. Soit $(v_n)_n \subset X$ une suite minimisante :

$$\int_0^1 G(\dot{v}_n(t)) dt \rightarrow \inf(\mathcal{P}), \quad \int_0^1 J\dot{v}_n(t) \cdot v_n(t) dt = 2.$$

D'après le Lemme 3.4 et l'inégalité de Poincaré, nous déduisons les estimées

$$\frac{\pi^2}{\beta} \|v_n\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\beta} \|\dot{v}_n\|_{L^2}^2 \leq \int_0^1 G(\dot{v}_n(t)) dt.$$

Nous en déduisons que $(v_n)_n$ est bornée dans X et, en passant éventuellement à une sous-suite, nous pouvons supposer que $v_n \rightharpoonup v$ dans X et

$$\begin{aligned} \dot{v}_n &\rightharpoonup \dot{v} \quad \text{dans } L^2(]0, 1[, \mathbb{R}^{2N}), \\ v_n &\rightarrow v \quad \text{uniformément sur } [0, 1]. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\int_0^1 J(\dot{v}(t)) \cdot v(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 J\dot{v}_n(t) \cdot v_n(t) dt = 2.$$

D'autre part, le Théorème 2.18 montre que

$$\int_0^1 G(\dot{v}(t)) dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 G(\dot{v}_n(t)) dt = \inf(\mathcal{P}).$$

Il s'ensuit que v est solution du problème de minimisation (\mathcal{P}). □

Lemme 3.6. *Soient $v \in X$ une solution de (\mathcal{P}) et $\lambda = \min(\mathcal{P})$. Alors*

$$\frac{d}{dt} \nabla G(\dot{v}) + \lambda J\dot{v} = 0.$$

Démonstration. Définissons sur X la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(w) = \int_0^1 G(\dot{w}(t)) dt - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 J\dot{w}(t) \cdot w(t) dt.$$

Par positive homogénéité de degré 2, pour tout $h \in X$, la fonction $f(\varepsilon) = \mathcal{J}(v + \varepsilon h)$ admet un minimum local en $\varepsilon = 0$. Dès lors, $\delta\mathcal{J}(v) = 0$ sur X , i.e.

$$\frac{d}{dt}\nabla G(\dot{v}) + \frac{\lambda}{2}J\dot{v} = -\frac{\lambda}{2}J\dot{v}.$$

□

Démonstration du Théorème 3.2. Les lemmes précédents assurent l'existence de $v \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et de $c \in \mathbb{R}^{2N}$ tels que

$$\nabla G(\dot{v}) + \lambda Jv = c.$$

Posons $u = c - \lambda Jv$. Nous obtenons finalement, par le Théorème 2.25,

$$\frac{J\dot{u}}{\lambda} = \dot{v} = \nabla H(u).$$

La Proposition 2.31 permet de conclure.

□

3.3 Minimax et période fixée

Soit X un espace de Banach. Considérons la géométrie du lemme du col d'Ambrosetti-Rabinowitz. Soient $\varphi \in C^1(X; \mathbb{R})$, $e \in X$ et $r > 0$ tels que

$$\varphi(e) \leq \varphi(0) < b = \inf_{\|u\|=r} \varphi(u). \quad (3.5)$$

Notons Γ l'ensemble des chemins de 0 à e :

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

et posons

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \varphi(\gamma(t)). \quad (3.6)$$

Rappelons que le dual de X est défini par

$$X' = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est linéaire et continue}\}.$$

La norme de $f \in X'$ est définie par

$$\|f\| = \sup_{\substack{u \in X \\ u \neq 0}} \frac{\langle f, u \rangle}{\|u\|} = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} \langle f, u \rangle.$$

Pour tout $u \in X$, $\varphi(u) \in X'$ et

$$\langle \varphi'(u), h \rangle = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varphi(u + \varepsilon h).$$

Théorème 3.7. *Sous l'hypothèse (3.5), il existe une suite $(u_n)_n \in X$ telle que*

$$\varphi(u_n) \rightarrow c, \quad \varphi'(u_n) \rightarrow 0.$$

□

La démonstration, assez technique, se fait par l'absurde en utilisant un lemme de déformation ou le principe variationnel d'Ekeland, voir [22, 39].

Définitions 3.8. La fonctionnelle φ vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c (ou condition $(PS)_c$) si toute suite $(u_n)_n \subset X$ telle que

$$\varphi(u_n) \rightarrow c, \quad \varphi'(u_n) \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

contient une sous-suite qui converge dans X .

La fonctionnelle vérifie la condition de $(PS)_c$ faible si l'existence d'une suite qui vérifie (3.7) implique l'existence de $u \in X$ tel que

$$\varphi(u) = 0, \quad \varphi'(u) = 0,$$

i. e. c est une valeur critique de φ .

Le résultat suivant généralise légèrement le célèbre lemme du col d'Ambrosetti-Rabinowitz (1973) :

Théorème 3.9. Soit $\varphi \in C^1(X; \mathbb{R})$ une fonctionnelle qui vérifie (3.5) et la condition de $(PS)_c$ faible au niveau c défini par (3.6). Alors c est une valeur critique de φ .

□

Considérons à nouveau le problème (3.1) - (3.2). Nous supposons que $f \in C([0, T])$ est de moyenne nulle. D'après le Théorème 3.1, l'action

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \left(\frac{\dot{u}(t)^2}{2} + a \cos u(t) + f(t)u(t) \right) dt$$

possède un minimum en u_0 . Supposons, pour simplifier, que u_0 est un minimum local strict sur H_T^1 . Le cas général est traité dans [22]. Par hypothèse, $\mathcal{J}(u_0 + 2\pi) = \mathcal{J}(u_0)$. Nous pouvons donc appliquer le Théorème 3.7 à

$$\varphi(u) = \mathcal{J}(u_0 + u),$$

avec $e \equiv 2\pi$ car $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. D'après le Théorème 3.7, il existe une suite $(u_n)_n \subset H_T^1$ telle que

$$\varphi(u_n) \rightarrow c, \quad \varphi'(u_n) \rightarrow 0,$$

où

$$c > \min_{H_T^1} \varphi = \min_{H_T^1} \mathcal{J}.$$

Notons $v_n = u_0 + u_n$. Par définition de φ , nous obtenons

$$\mathcal{J}(v_n) \rightarrow c, \quad \|\delta \mathcal{J}(v_n)\| \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

La formule (3.3) montre que nous pouvons supposer que $\bar{v}_n \in [0, 2\pi[$. L'inégalité (3.4) assure que $(\dot{u}_n)_n$ est bornée dans L^2 . En passant éventuellement à une sous-suite, nous pouvons supposer que $v_n \rightharpoonup v$ dans H_T^1 et

$$\dot{v}_n \rightharpoonup \dot{v} \quad \text{dans } L^2(]0, T[),$$

$$v_n \rightarrow v \quad \text{uniformément sur } [0, T].$$

Il nous reste à prouver la convergence en norme dans H_T^1 . D'après (3.8), nous avons

$$(\delta \mathcal{J}(v_n) - \delta \mathcal{J}(v))(v_n - v) \rightarrow 0,$$

ou encore

$$\int_0^T |\dot{v}_n(t) - \dot{v}(t)|^2 dt - a \int_0^T (\sin v_n(t) - \sin v(t)) (v_n(t) - v(t)) dt + \int_0^T f(t)(v_n(t) - v(t)) dt \rightarrow 0.$$

Comme $v_n \rightarrow v$ uniformément sur $[0, T]$, les deux derniers termes de la somme précédente tendent vers 0. Dès lors,

$$\int_0^T |\dot{v}_n(t) - \dot{v}(t)|^2 dt \rightarrow 0,$$

et $v_n \rightarrow v$ dans H_T^1 . Il existe donc un point critique v de \mathcal{J} sur H_T^1 tel que

$$\mathcal{J}(v) > \min_{H_T^1} \mathcal{J}.$$

Il existe donc, comme l'ont démontré J. Mawhin et le second auteur en 1984, une seconde solution géométriquement distincte de l'équation du pendule forcé lorsque le terme forçant est de moyenne nulle. Si $f \equiv 0$ et $T < 2\pi$, nous obtenons la solution périodique stable et constante $u \equiv 0$. La structure très riche de l'équation du pendule forcé est décrite dans [21].

3.4 Minimax et énergie fixée

Considérons à nouveau le problème

$$\begin{aligned} J\dot{u} &= \nabla H(u), \\ H(u) &= c, \\ u(0) &= u(T), \end{aligned}$$

où l'énergie c est fixée et la période T inconnue. Le résultat suivant a été prouvé par Rabinowitz [24] en 1978.

Théorème 3.10. *Soient $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$ et $S = H^{-1}(c)$ tels que*

- a) *S est le bord d'un voisinage compact étoilé de l'origine,*
- b) *pour tout $y \in S$, $\nabla H(y) \cdot y \neq 0$.*

Alors S contient l'orbite d'une solution périodique de $J\dot{u} = \nabla H(u)$.

Pour chaque $y \in \mathbb{R}^N$, il existe un et un seul $\lambda(y) \geq 0$ tel que $y \in \lambda(y)S$. D'après la Proposition 2.29, nous pouvons supposer que $H(y) = (\lambda(y))^2$.

La Section 3.2 suggère un principe de minimisation. Mais ce principe n'est pas utilisable.

Proposition 3.11. *L'infimum de $\int_0^1 H(v(t)) dt$ sous les contraintes*

$$v \in H_1^1, \quad \int_0^1 J\dot{v}(t) \cdot v(t) dt = 2$$

est égal à 0.

Démonstration. Soit $v \in H_1^1$ tel que $\int_0^1 J\dot{v}(t) \cdot v(t) dt = 2$. Posons $v_n(t) = v(nt)/\sqrt{n}$ (après avoir étendu v à \mathbb{R} par périodicité). Il est clair que $v_n \in H_1^1$ et $\int_0^1 J\dot{v}_n(t) \cdot v_n(t) dt = 2$. Comme par le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 H(v_n(t)) dt = 0,$$

la proposition est démontrée. □

La preuve du Théorème 3.10 repose sur un argument de minimax délicat. L'espace H_1^1 n'est pas adapté au problème. Il doit être remplacé par $H_1^{1/2}$. Associons à $u \in L^2([0, 1]; \mathbb{R}^{2N})$ sa série de Fourier

$$u \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2k\pi Jt}$$

où $(\hat{u}(k))$ est une suite de vecteurs de \mathbb{R}^{2N} .

Définition 3.12. Par définition, $u \in H_1^{1/2}$ si

$$\|u\|_{H_1^{1/2}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|) |\hat{u}(k)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Observons que

$$\begin{aligned} u \in L^2 &\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}(k)|^2 < \infty, \\ u \in H_1^1 &\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2) |\hat{u}(k)|^2 < \infty, \end{aligned}$$

de sorte que $H_1^1 \subset H_1^{1/2} \subset L^2$. Les fonctions de $H_1^{1/2}$ ne sont pas nécessairement continues.

Le quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} est identifié au cercle \mathbb{T} . L'action de \mathbb{T} sur $H_1^{1/2}$ est définie par les translations

$$T(\tau)u(t) = u(t + \tau).$$

Les fonctionnelles définies sur $H_1^{1/2}$ par

$$v \rightarrow \int_0^1 H(v(t)) dt, \quad v \rightarrow \int_0^1 J\dot{v}(t) \cdot \dot{v}(t) dt$$

sont invariantes sous l'action de \mathbb{T} . Un argument de minimax élaboré permet alors de prouver le Théorème 3.10 grâce à cette invariance.

La question de la multiplicité des orbites périodiques se pose également.

Exemple 3.13. Considérons le Hamiltonien

$$H(y) = \sum_{k=1}^N y_{2k-1}^2 + \omega_k y_{2k}^2$$

décrivant N oscillateurs harmoniques découplés. Si les fréquences ω_k sont rationnellement indépendantes, pour tout $c > 0$, l'hypersurface $H^{-1}(c)$ contient exactement N orbites périodiques.

Indiquons un résultat de multiplicité dû à Ekeland et à Lasry [10].

Théorème 3.14. Soit $S = H^{-1}(c)$ le bord d'un compact strictement convexe C tel que

$$B(0, r) \subset C \subset B(0, R)$$

et $R^2 < 2r^2$. Alors S contient au moins N orbites périodiques du système $J\dot{u} + \nabla H(u) = 0$.

Terminons par un résultat générique de Struwe [36] qui généralise le Théorème 3.10.

Théorème 3.15. Soient $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$ et $[a, b]$ tel que, pour tout $c \in [a, b]$, $H^{-1}(c)$ est compact et, pour tout $y \in H^{-1}(c)$, $\nabla H(y) \neq 0$. Alors, pour presque tout $c \in [a, b]$, $H^{-1}(c)$ contient une orbite périodique du système $J\dot{u} = \nabla H(u)$.

Le résultat de Struwe est optimal. En effet, Ginzburg et Herman [12, 16] ont prouvé que, en général, $H^{-1}(c)$ peut ne pas contenir d'orbite périodique. Le survey de Bartsch et Szulkin [1] contient de nombreux autres résultats.

4 Solutions homoclines

Considérons le Lagrangien

$$L(t, x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 - V(t, x).$$

Les équations d'Euler-Lagrange mènent aux équations de Newton

$$\ddot{u} + \frac{\partial V}{\partial u}(t, u) = 0, \quad (4.1)$$

qui forment un système de N équations scalaires du second ordre. Lorsque $N = 1$ et que le Lagrangien est conservatif, il est assez aisé de décrire les solutions de l'équation de Newton (4.1) correspondante. Grâce à la conservation de l'énergie le long des solutions, nous pouvons représenter les trajectoires de celles-ci dans le plan des phases (u, \dot{u}) . Considérons le cas concret d'un pendule simple non forcé. L'équation de Newton s'écrit

$$\ddot{u} + a \sin u = 0, \quad (4.2)$$

où a est une constante positive dépendant de la longueur du pendule. L'énergie de la solution de conditions initiales (u_0, v_0) est donnée par

$$H = H(u_0, v_0) = \frac{v_0^2}{2} + a(1 - \cos u_0),$$

et la trajectoire de cette solution dans le plan des phases (u, \dot{u}) est la courbe passant par (u_0, v_0) et satisfaisant l'équation

$$\frac{\dot{u}^2}{2} + a(1 - \cos u) = H.$$

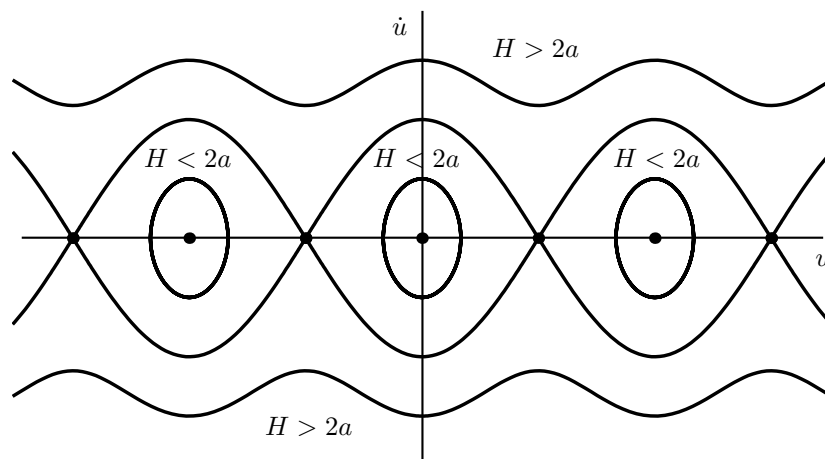


FIG. 3 – Plan des phases du pendule.

Les solutions d'énergie nulle sont les positions d'équilibre stables $u = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, les solutions d'énergie $H \in]0, 2a[$ décrivent des courbes fermées et sont périodiques tandis que les trajectoires des solutions d'énergie $H > 2a$ sont des courbes non bornées. Toutes ces trajectoires sont décrites

dans la figure 3. Lorsque l'énergie H vaut $2a$, les solutions de l'intégrale d'énergie consistent en les positions d'équilibre instables $u = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et les graphes des fonctions

$$\dot{u} = \pm \sqrt{2a(1 + \cos u)}, \quad u \neq (2k + 1)\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, les solutions dont les trajectoires décrivent le graphe de la fonction $\sqrt{2a(1 + \cos u)}$ dans l'intervalle $] -\pi, \pi[$ sont asymptotiques à π (respectivement à $-\pi$), lorsque $t \rightarrow +\infty$ (respectivement lorsque $t \rightarrow -\infty$). Poincaré qualifiait de telles solutions de *solutions doublement asymptotiques*. Nous les appellerons *solutions hétéroclines* joignant $-\pi$ à π . Remarquons que, physiquement, $-\pi$ et π représentant la même position du pendule, il est plus naturel de regarder les trajectoires dans un cylindre (c'est à dire dans le plan où l'on identifie les points (u_1, \dot{u}_1) et (u_2, \dot{u}_2) si $u_1 = u_2 \bmod{2\pi}$ et $\dot{u}_1 = \dot{u}_2$). Dans cette représentation des trajectoires, une solution hétérocline de $-\pi$ à π a les mêmes limites en $\pm\infty$. On parle dans ce cas de *solution homocline*. L'exemple du pendule montre que lorsque le potentiel est périodique, une solution peut-être tantôt qualifiée d'hétérocline tantôt d'homocline selon que l'on regarde les trajectoires dans l'espace tout entier ou que l'on passe à l'espace quotient. En particulier, lorsqu'une solution hétérocline rejoint deux équilibres non adjacents, disons z_1 et $z_2 = z_1 + q$, où $q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, et que ces équilibres sont identifiés par périodicité, la solution hétérocline est en réalité une solution homocline dont le type d'homotopie est non nul (cela signifie essentiellement que la trajectoire fait un certain nombre de tours lorsqu'on la regarde sur le tore T^n). Le lecteur vérifiera sans peine que pour les équations scalaires dont les plans de phases sont repris dans la figure 4, il n'y a pas de confusion possible entre solutions homoclines et hétéroclines.

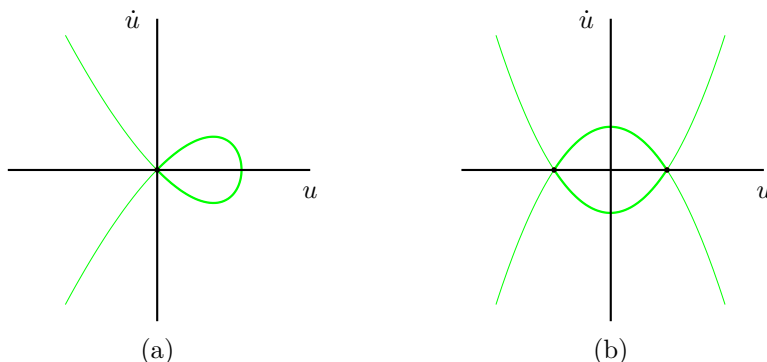


FIG. 4 – (a) *Orbite homocline à 0 pour le potentiel $V(u) = u^3/3 - u^2/2$. (b) Orbites hétéroclines de -1 à $+1$ (resp. de $+1$ à -1) pour le potentiel $V(u) = -(u^2 - 1)^2$.*

Plus généralement, lorsque z est une orbite donnée du système Hamiltonien (4.1), on dira que u est une *solution homocline* à z si $u \neq z$ et $|u(t) - z(t)| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. Pour étudier ce type de solution, on peut bien entendu se ramener par changement de variables à l'étude des solutions homoclines à 0. Cependant, il n'est pas évident que le nouveau système Hamiltonien conserve les (éventuelles bonnes) propriétés du système original. Lorsque l'Hamiltonien et z sont périodiques de même période, il s'avère qu'un changement de variables symplectique fait souvent l'affaire. Nous n'entrerons pas dans ce genre de considérations ici et renvoyons le lecteur à [7]. Tout au long de ce paragraphe, nous nous intéresserons donc à la recherche de solutions homoclines à l'origine.

Aux difficultés déjà rencontrées dans l'étude des solutions périodiques s'ajoutent de nouvelles liées à la nature des solutions homoclines et hétéroclines. En effet, une première difficulté technique dans l'utilisation de l'approche variationnelle provient du fait que, comme nous l'avons fait remarquer dans l'Exemple 2.13, les classes de fonctions définies sur \mathbb{R} tout entier n'ont pas d'aussi bonnes propriétés de compacité que les espaces de fonctions périodiques. Ceci entraîne un manque de

compacité dans le problème qui se traduit par le fait que la condition de Palais-Smale n'est en général pas satisfaite.

4.1 Systèmes autonomes du second ordre

Commençons par considérer le modèle simple

$$L(t, x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : (t, x, y) \rightarrow \frac{1}{2}(|y|^2 + |x|^2) - \frac{1}{p+1}|x|^{p+1},$$

où $p > 1$. L'action associée à ce Lagrangien est donnée par

$$\mathcal{J}(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\dot{u}(t)|^2 + |u(t)|^2) dt - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{p+1} dt,$$

et mène à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\ddot{u} - u + u^p = 0. \quad (4.3)$$

L'existence d'une solution homocline en 0 se déduit aisément d'une analyse du plan des phases. Cette solution, unique à translation près, s'obtient par ailleurs de manière explicite en résolvant l'intégrale d'énergie par séparation des variables. L'orbite homocline dans le cas $p = 2$ est représentée dans la figure 4 (a).

Essayons néanmoins de prouver, pour ce modèle simple, l'existence de la solution homocline par une méthode variationnelle. Nous verrons ensuite comment la méthode s'adapte aux systèmes pour lesquels l'analyse du plan des phases n'est pas disponible.

Théorème 4.1. *Soit $p > 1$. Il existe $u \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $\delta\mathcal{J}(u) = 0$ sur $H^1(\mathbb{R})$. En particulier, u est une solution homocline de l'équation (4.3).*

Démonstration. Le lecteur vérifiera sans peine que, pour tout $h \in H^1(\mathbb{R})$, la variation première de \mathcal{J} en u dans la direction h est donnée par

$$\int_{\mathbb{R}} (\dot{u}(t)\dot{h}(t) + u(t)h(t) - (u(t))^p h(t)) dt.$$

La fonctionnelle \mathcal{J} n'est pas minorée sur $H^1(\mathbb{R})$. En effet, étant donné que $p+1 > 2$, on vérifie que si $u \neq 0$, $\mathcal{J}(su) \rightarrow -\infty$ lorsque $s \rightarrow \infty$. Il s'ensuit que \mathcal{J} n'admet pas de minimiseur global dans $H^1(\mathbb{R})$. Observons par contre que 0 est un minimum local de \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2 - C \|u\|_{H^1}^{p+1},$$

où nous avons utilisé l'injection continue de H^1 dans L^{p+1} . La fonctionnelle présente donc la géométrie du col. En conséquence, nous pouvons définir le *niveau de minimax*

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} \mathcal{I}(\gamma(s)) > 0,$$

où Γ est la classe de chemins définie par

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1]; H^1(\mathbb{R})) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Le Théorème 3.7 affirme l'existence d'une suite de Palais-Smale $(u_n)_n \subset H^1(\mathbb{R})$ au niveau c , c'est à dire une suite $(u_n)_n \subset H^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c \quad \text{et} \quad \sup_{h \in H^1(\mathbb{R})} \frac{\delta\mathcal{J}(u_n)(h)}{\|h\|_{H^1}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Si \mathcal{J} satisfait la condition de compacité $(PS)_c$, alors c est un *niveau critique* de \mathcal{J} , c'est-à-dire qu'il existe $u \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{J}(u) = c$ et $\delta\mathcal{J}(u)(h) = 0$ pour tout $h \in H^1(\mathbb{R})$. Dans notre cas, étant donné l'invariance de la fonctionnelle sous l'action des translations (qui forment un groupe non compact), la condition de Palais-Smale n'est pas remplie. En effet, si u_n est une suite de Palais-Smale au niveau c , $\tau_n u_n$, où τ_s est défini par $\tau_s u(t) = u(t-s)$, est également une suite de Palais-Smale. Dès lors, une suite de Palais-Smale n'admet en général pas de sous-suite convergente. Pour contourner cette difficulté, nous allons tout de même profiter de l'invariance de \mathcal{J} par rapport aux translations pour construire une "bonne" suite de Palais-Smale dans un sens que nous préciserons de suite. Étant donné (4.4), nous pouvons supposer sans perte de généralité que

$$\left| \|u_n\|_{H^1}^2 - \|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \right| = |\delta\mathcal{J}(u_n)(u_n)| \leq \|u_n\|_{H^1}$$

et

$$(p+1)\mathcal{J}(u_n) = \frac{p+1}{2} \|u_n\|_{H^1}^2 - \|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq (p+1)(c+1),$$

ce qui permet de conclure que

$$\frac{p-1}{2} \|u_n\|_{H^1}^2 \leq (p+1)(c+1) + \|u_n\|_{H^1}.$$

En particulier, vu que $p > 1$, nous en déduisons que toute suite de Palais-Smale au niveau c est bornée dans $H^1(\mathbb{R})$. En passant éventuellement à une sous-suite, nous pouvons supposer que $(u_n)_n$ converge faiblement vers une fonction $u \in H^1(\mathbb{R})$. Il est assez simple de vérifier que $\delta\mathcal{J}(u) = 0$ sur $h \in H^1(\mathbb{R})$ mais il nous faut encore exclure la possibilité que u soit nulle. C'est ici qu'intervient le choix d'une "bonne suite" de Palais-Smale. En effet, pour que la limite faible ne soit pas nulle, nous devons choisir judicieusement celle-ci. En utilisant le fait que les suites de Palais-Smale sont bornées dans H^1 , nous observons qu'elles ne peuvent pas converger uniformément vers 0. En effet, nous avons

$$\delta\mathcal{J}(u_n)(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(u_n) \rightarrow c,$$

ce qui implique que

$$\|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \rightarrow \frac{2c(p+1)}{p-1}. \quad (4.5)$$

Comme

$$\|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq \|u_n\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_n\|_{L^2}^2 \leq \|u_n\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_n\|_{H^1}^2 \leq C \|u_n\|_{L^\infty}^{p-1},$$

notre affirmation découle de (4.5). Choisissons à présent y_n tel que $u_n(y_n) = \max_{\mathbb{R}} u_n$ et définissons la suite $(v_n)_n$ par $v_n(t) = u_n(t + y_n)$. Il est clair que $(v_n)_n$ est encore une suite de Palais-Smale au niveau c . Comme $(v_n)_n$ est bornée dans H^1 , le Théorème de Rellich et le procédé de la diagonale de Cantor nous permettent à présent de définir une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\mathbb{R})$ et fortement dans $L_{loc}^{p+1}(\mathbb{R})$. Notons cette sous-suite $(v_{n_i})_i$ et v sa limite. En utilisant les propriétés de cette sous-suite, on s'aperçoit aisément que

$$\delta\mathcal{J}(v_{n_i})(h) \rightarrow \delta\mathcal{J}(v)(h)$$

pour tout $h \in H^1(\mathbb{R})$ ce qui permet de conclure. Comme

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} v_{n_i}(0) > 0,$$

v est non triviale. Finalement, comme $v \in H^1(\mathbb{R})$, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} v(t) = 0,$$

si bien que v est une solution homocline en zéro. □

Remarque 4.2. Dans le cas de l'équation (4.3), il est immédiat de vérifier que les solutions homoclines vérifient également

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{u}(t) = 0.$$

Cette dernière condition est traditionnellement incluse dans la définition de solution homocline, plus particulièrement en théorie des systèmes dynamiques. Néanmoins, nous ne vérifierons pas systématiquement cette condition et laissons ce soin au lecteur.

Remarque 4.3. Nous avons utilisé une suite de Palais-Smale pour obtenir une solution sans démontrer pour autant que celle-ci réalise le niveau de minimax c .

Remarque 4.4. L'argument de recentrage des éléments de la suite de Palais-Smale permettant d'éviter qu'elle ne converge faiblement vers la solution triviale est en fait un exemple simple de l'idée générale de renormalisation des suites de Palais-Smale présente dans beaucoup de problèmes variationnels où la compacité fait défaut. L'observation que les suites de Palais-Smale ne peuvent converger uniformément vers 0 est par ailleurs une version élémentaire de la méthode de "concentration-compacité" développée par P. L. Lions. Les idées principales de cette méthode sont omni-présentes dans les preuves plus complexes des résultats énoncés dans la Section 6.

4.2 Systèmes périodiques du second ordre

L'argument de "recentrage" des suites de Palais-Smale peut paraître limité aux équations scalaires autonomes. Il s'adapte pourtant très bien aux systèmes périodiques. Considérons le modèle

$$\ddot{u} - a(t)u + b(t)u^p = 0, \quad (4.6)$$

où a, b sont des fonctions continues périodiques strictement positives. Observons que cette fois, comme l'énergie n'est pas conservée, l'utilisation de l'approche variationnelle se justifie pleinement même dans le cas scalaire. La construction d'une bonne suite de Palais-Smale $(u_n)_n$ consiste ici à "recentrer" le maximum de u_n entre $t = 0$ et $t = T$ en utilisant des translations de longueur mT , où T est la période commune de a et b et $m \in \mathbb{Z}$.

Revenons à présent au système plus général (4.1) et supposons que le potentiel V s'écrive

$$V(t, x) = -\frac{1}{2}L(t)x \cdot x + W(t, x),$$

où

(L_1) $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$ est une fonction continue telle que $L(t)$ soit une matrice symétrique et définie positive pour tout $t \in \mathbb{R}$;

(W_1) $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle qu'il existe $\mu > 2$ satisfaisant

$$0 < \mu W(t, x) \leq x \cdot \nabla_x W(t, x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$;

(W_2) $\nabla_x W(t, x) = o(|x|)$ uniformément en t lorsque $x \rightarrow 0$.

Cet ensemble d'hypothèses s'applique à l'équation (4.3) et à sa généralisation vectorielle. Les arguments que nous avons utilisés pour traiter le modèle (4.3) s'adaptent assez facilement lorsque V est T -périodique.

Théorème 4.5 (Rabinowitz 1990). Soient $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$, $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (L_1) , (W_1) et (W_2) . Supposons de plus que L est T -périodique et W est T -périodique en la variable t . Alors le système

$$\ddot{u} - L(t)u + \nabla_u W(t, u) = 0 \quad (4.7)$$

possède au moins une solution homocline en 0.

Démonstration. On vérifie pour commencer que la fonctionnelle définie formellement par

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\dot{u}(t)|^2 + L(t)u(t) \cdot u(t)) dt - \int_{\mathbb{R}} W(t, u(t)) dt$$

est de classe C^1 sur l'espace $H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ muni de la norme équivalente

$$\|u\|^2 := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\dot{u}(t)|^2 + L(t)u(t) \cdot u(t)) dt.$$

Cette norme est naturelle car elle permet entre autres de simplifier l'écriture de la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}} W(t, u(t)) dt.$$

Remarquons aussi que l'équivalence avec la norme usuelle se déduit de (L_1) .

Pour montrer que \mathcal{J} possède la géométrie du col, il suffit de se baser sur les hypothèses (W_1) et (W_2) en observant qu'elles entraînent les propriétés suivantes : $W(t, u) = o(|u|^2)$ uniformément en t lorsque u tend vers 0 et pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha(t) > 0$ tel que pour $|u| \geq 1$, $W(t, u) \geq \alpha(t)|u|^\mu$. La bornitude des suites de Palais-Smale découle aisément de la condition (W_1) et le fait que celles-ci ne peuvent converger uniformément vers 0 se déduit d'un raisonnement par l'absurde s'appuyant en partie sur l'hypothèse (W_2) . L'argument de renormalisation d'une suite de Palais-smale permet de conclure. \square

La preuve originale de Rabinowitz [27] ne suit pas ce schéma. En effet, Rabinowitz procède par approximation et obtient une solution homocline comme limite de solutions périodiques de périodes $2kT$, k tendant vers l'infini. Les solutions périodiques sont facilement obtenues de manière variationnelle en utilisant le théorème du col mais ici aussi, une renormalisation est nécessaire pour éviter de tomber sur la solution nulle lors du passage à la limite. Ce procédé, qui du reste est fréquemment utilisé pour "capturer" des solutions homoclines et hétéroclines, est une alternative pour contourner le manque de compacité dans l'approche globale.

4.3 Compacité et réversibilité

Lorsque a et b dans (4.6) ne sont pas périodiques, la situation est bien plus compliquée et fait encore aujourd'hui l'objet d'actives recherches (tant pour l'équation différentielle scalaire que pour ses homologues vectorielle ou aux dérivées partielles où la dérivée seconde est remplacée par le Laplacien ou un opérateur elliptique). Des hypothèses de monotonie ou de symétrie permettent bien souvent de simplifier le problème. Il est également possible de trouver des conditions spécifiques sur les fonctions a et b pour que la condition de Palais-Smale soit satisfaite.

Nous considérons à nouveau le Lagrangien

$$L(t, x, y) = \frac{1}{2} (|y|^2 + L(t)x \cdot x) - W(t, x),$$

sans hypothèse de périodicité temporelle. En plus des conditions (L_1) , (W_1) et (W_2) , nous supposons

(L_2) il existe $\alpha \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \alpha(t) = +\infty \quad \text{et} \quad L(t)x \cdot x \geq \alpha(t)|x|^2 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N;$$

(W_3) il existe $\bar{W} \in C(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ tel que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,

$$|W(t, x)| + |\nabla_x W(t, x)| \leq |\bar{W}(x)|.$$

Introduisons l'espace de Hilbert

$$X := \{u \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \mid \int_{\mathbb{R}} (|\dot{u}(t)|^2 + L(t)u(t) \cdot u(t)) dt < \infty\},$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_X = \int_{\mathbb{R}} (\dot{u}(t) \cdot \dot{v}(t) + L(t)u(t) \cdot v(t)) dt$$

et de la norme associée $\|u\|_X = (u, u)_X^{1/2}$. L'hypothèse (L_2) induit de la compacité dans le problème comme le montre le lemme suivant.

Lemme 4.6. *Supposons que $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$ est une fonction continue satisfaisant les hypothèses (L_1) et (L_2). Alors l'injection de X dans $L^2(\mathbb{R})$ est compacte.*

La démonstration de ce lemme consiste à montrer que si $(u_k)_k \subset X$ est une suite faiblement convergente pour la topologie de X alors elle converge fortement (vers la même limite) dans L^2 . Par linéarité, on peut sans perte de généralité supposer que $u_k \rightharpoonup 0$. Le Théorème de Rellich montre que sur tout intervalle fermé borné I , $u_k|_I \rightarrow 0$ dans $L^2(I)$. D'autre part, l'hypothèse de coercivité (L_2) implique que pour tout $n \geq 1$, il existe I_n fermé borné tel que

$$\sup_{k \geq 1} \int_{I_n^c} |u_k(t)|^2 dt < \frac{1}{n}.$$

La conclusion s'ensuit aisément.

Cette injection compacte permet maintenant de démontrer la condition de Palais-Smale pour la fonctionnelle d'action

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\dot{u}(t)|^2 + L(t)u(t) \cdot u(t)) dt - \int_{\mathbb{R}} W(t, u(t)) dt.$$

Lemme 4.7. *Soient $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$, $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (L_1), (L_2), (W_1), (W_2) et (W_3). Alors \mathcal{J} satisfait la condition de Palais-Smale.*

La convergence faible d'une sous-suite découle comme d'habitude de l'hypothèse (W_1) et de la réflexivité de X . La convergence forte de cette sous-suite se démontre grâce à l'injection compacte dans L^2 obtenue dans le Lemme 4.6. Remarquons que la condition (W_3) est utilisée pour obtenir des majorations uniformes en t .

Théorème 4.8 (Omana-Willem 1992). *Soient $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$, $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (L_1), (L_2), (W_1), (W_2) et (W_3). Alors le système (4.7) possède au moins une solution homocline en 0.*

Étant donné le Lemme 4.7, la démonstration de ce théorème est classique. Il suffit de vérifier que la fonctionnelle \mathcal{J} a la géométrie du col.

Remarque 4.9. *Le théorème 4.8 a été démontré indépendamment par Rabinowitz et Tanaka [34] en utilisant une variante du théorème du col sans vérifier la condition de Palais-Smale.*

Remarque 4.10. *Sous l'hypothèse supplémentaire de symétrie $W(t, -x) = W(t, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$, on peut démontrer l'existence d'une suite (non bornée dans X) de solutions homoclines du système (4.7).*

L'hypothèse de coercivité $L(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$ est fort restrictive. Elle peut être affaiblie lorsqu'une hypothèse de symétrie dans le temps est imposée au potentiel. Introduisons les conditions

$$\begin{aligned} (L_3) \quad & L(t) = L(-t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}; \\ (W_4) \quad & W(t, x) = W(-t, x) \text{ pour tout } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \\ (M) \quad & \text{pour tout } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ & L'(t)x \cdot x - W_t(t, x) \geq 0. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses (L_3) et (W_4) , le système (4.7) est dit réversible dans le temps. Il est naturel dans ce cas de chercher une solution paire du système (4.7). La condition de monotonie (M) donne, elle, une certaine coercitivité au Lagrangien. En effet, considérons le modèle scalaire (4.6) avec $p > 1$ et supposons que a et b sont des fonctions continues telles que $a(-t) = a(t) > 0$, $b(-t) = b(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$, $a'(t)t > 0$ et $b'(t)t < 0$ pour tout $t \neq 0$. Sous ces hypothèses, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'équation (4.6) possède une unique solution positive u_k satisfaisant aux conditions de Dirichlet $u(-k) = u(k) = 0$. De plus, le célèbre résultat de Gidas, Ni et Nirenberg [14] implique que u_k est une fonction paire telle que $u'_k(t) < 0$ sur $]0, k[$. En particulier, chaque u_k atteint son maximum à l'origine et il s'ensuit que

$$u_k(0) \geq \left(\frac{a(0)}{b(0)} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Une analyse de la suite $(u_k)_k$ montre qu'elle converge (dans $C_{loc}^2(\mathbb{R})$) vers une solution homocline. L'estimation inférieure en 0 assure que la fonction limite est non triviale. En fait, les hypothèses de monotonie sur a et b forcent chaque u_k à se "concentrer" autour de l'origine, ce qui permet d'éviter une perte de masse à l'infini. Pour le système (4.7), nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.11 (Korman-Lazer 1994). *Soient $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$, $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (L_1) , (L_3) , (W_1) , (W_2) et (W_4) . Alors le système (4.7) possède au moins une solution homocline en 0.*

L'idée de la démonstration est la même que dans le cas scalaire. Cependant, il n'y a pas d'analogue pour les systèmes du résultat de symétrie de Gidas, Ni et Nirenberg, si bien qu'il faut trouver une autre façon de contrôler la valeur de $u_k(0)$. Pour ce faire, on observe que, étant donné l'hypothèse (M) , l'énergie mécanique

$$E(t) = \frac{1}{2} |\dot{u}_k(t)|^2 - \frac{1}{2} L(t)u_k(t) \cdot u_k(t) + W(t, u_k(t))$$

est décroissante sur $[0, k]$. Il s'ensuit que $E(0) \geq 0$ ce qui permet d'obtenir une estimation inférieure uniforme $|u_k(0)| \geq \delta > 0$.

Remarque 4.12. *Dans le cas des systèmes ($N \neq 1$), la solution homocline n'est en général ni unique, ni à composantes positives même sous l'hypothèse de réversibilité.*

4.4 Systèmes Lagrangiens singuliers

Les systèmes Lagrangiens singuliers occupent une place importante dans les applications. Citons par exemple les systèmes mécaniques modélisant des interactions gravitationnelles ou coulombiennes. Ces systèmes sont généralement plus délicats à étudier.

Considérons par exemple le système du second ordre (4.1), où $u \in \mathbb{R}^2$ et V est un potentiel singulier (répulsif) en un point du plan. Nous supposons

(V₁) il existe $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $V \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{\xi\}; \mathbb{R})$ et

$$\lim_{x \rightarrow \xi} V(t, x) = -\infty,$$

uniformément en t ;

(V₂) il existe un voisinage \mathcal{V} de ξ et une fonction $U \in C^1(\mathcal{V} \setminus \{\xi\}; \mathbb{R})$ tels que

$$\lim_{x \rightarrow \xi} |U(x)| = \infty \quad \text{et} \quad |U'(x)|^2 \leq -V(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{\xi\};$$

(V₃) $V(t, 0) = 0 > V(t, x)$ si $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et il existe $V_0 < 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} V(t, x) \leq V_0.$$

Sous ces hypothèses assez simples, on peut construire par un argument élémentaire de minimisation deux solutions homoclines en 0. La construction se base sur la géométrie particulière du plan.

Théorème 4.13 (Rabinowitz 1996). *Soit $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (V₁), (V₂) et (V₃). Supposons de plus que V est T -périodique en la variable t . Alors le système (4.1) possède au moins deux solutions homoclines en 0.*

L'idée de la preuve est cette fois de minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\dot{u}(t)|^2 dt - \int_{\mathbb{R}} V(t, u(t)) dt$$

dans une classe adéquate de fonctions. Introduisons pour cela dans l'espace

$$X = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}} |\dot{u}(t)|^2 dt < \infty\},$$

le sous-espace des éléments de X qui évitent la singularité ξ :

$$\Lambda = \{u \in X \mid u(t) \neq \xi \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

Nous pouvons à présent définir la fonctionnelle \mathcal{J} sur ce sous-espace Λ et il est assez aisé de vérifier que, sous les hypothèses du théorème, toute fonction $u \in \Lambda$ d'action finie est telle que $|u(\pm\infty)| = 0$. Cette observation et l'injection continue de X dans $C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ permettent de voir l'image des éléments de Λ d'action finie comme des lacets dans \mathbb{R}^2 basés en 0. Pour de tels $u \in \Lambda$, nous pouvons définir le nombre de rotations $i(u, \xi)$ de $u(\mathbb{R})$ autour de ξ . En identifiant \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} , le nombre de rotations peut être calculé par la formule

$$i(u, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_u \frac{dz}{z - \xi}.$$

La formule de Cauchy montre en particulier que ce nombre est toujours un entier. Il représente le nombre de tours que décrit la courbe autour de ξ . Le signe indique si la courbe tourne dans le sens horlogique ou non. Définissons alors les classes

$$\Gamma^\pm = \{u \in \Lambda \mid i(u) \in \pm\mathbb{N}\}.$$

Les éléments de Γ^+ tournent autour de ξ au moins une fois dans le sens des aiguilles d'une montre tandis que ceux de Γ^- tournent au moins une fois dans le sens opposé. On peut démontrer que les deux niveaux

$$c^\pm = \inf_{u \in \Gamma^\pm} \mathcal{J}(u)$$

sont atteints par des solutions homoclines u^\pm de (4.1). Lorsque V est réversible dans le temps, on ne peut a priori pas exclure la possibilité que u^+ et u^- correspondent à la même orbite homocline : $u^+(t) = u^-(-t)$.

Remarque 4.14. *Le rôle de l'hypothèse (V_2) mérite quelques explications. Cette condition, parfois appelée condition de répulsivité forte, a été introduite par Gordon [15]. Elle implique que les solutions H_{loc}^1 du système ne peuvent pas avoir de collisions avec la singularité ξ . Sans cette condition, le système (4.1) possède des solutions homoclines généralisées qui peuvent entrer en collision avec la singularité.*

Remarque 4.15. *Une étude précise de l'ensemble des minimiseurs montre que, dans le cas autonome, les niveaux c^\pm sont atteints par des courbes simples, c'est-à-dire des courbes tournant exactement une fois autour de la singularité. Sous des hypothèses adéquates et toujours dans le cas autonome, Caldiroli et Nolasco [5] ont également montré que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe une solution homocline u_k telle que $i(u_k, \xi) = k$.*

Le Théorème 4.13 est un exemple du genre de résultat auquel on peut s'attendre en présence de singularités. Des résultats plus élaborés existent dans des cadres plus généraux mais nécessitent des arguments plus complexes.

4.5 Systèmes Hamiltoniens périodiques

Nous décrivons dans cette section le cadre variationnel permettant de traiter un système Hamiltonien plus général. Lorsque le Hamiltonien est convexe, nous pouvons définir comme dans la Section 3.2 une fonctionnelle d'action duale à l'aide de la transformée de Legendre-Fenchel. Nous ne suivons pas cette voie ici et renvoyons le lecteur par exemple à [7].

Les difficultés techniques sont par contre plus importantes lorsqu'aucune hypothèse de convexité n'est satisfaite puisqu'il faut alors compter avec le caractère fortement indéfini de la fonctionnelle tout en maîtrisant le manque de compacité. Considérons le système Hamiltonien

$$J\dot{u} = \nabla H(t, u), \quad (4.8)$$

où le Hamiltonien

$$H(t, u) = \frac{1}{2}Au \cdot u + G(t, u)$$

est tel que

- (A₁) A est une matrice symétrique réelle $2N \times 2N$;
- (A₂) le spectre de JA est tel que $\sigma(JA) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$;
- (G₁) $G \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N})$, $G(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\nabla_u G(t, u)/|u| \rightarrow 0$ lorsque $u \rightarrow 0$, uniformément en t .

En particulier, $H(t, 0) \equiv 0$, et sous ces hypothèses 0 est un *équilibre hyperbolique*. Nous supposons de plus que

- (G₂) G est 1-périodique dans la variable t ;
- (G₃) il existe $c > 0$ et $s > 2$ tels que

$$|\nabla_u G(t, u)| \leq c(1 + |u|^{s-1});$$

- (G₄) il existe $\mu > \max(2, s - 1)$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}$,

$$\delta|u|^\mu \leq \mu G(t, u) \leq u \cdot \nabla_u G(t, u).$$

L'action associée au système (4.8) est donnée par

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (J\dot{u}(t) - Au(t)) \cdot u(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, u(t)) dt.$$

Sous les hypothèses précédentes, la fonctionnelle Ψ est bien définie dans l'espace de Sobolev

$$X = H^{1/2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{2N}) \mid \int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)^{1/2} |\hat{u}(x)|^2 dx < \infty\},$$

où \hat{u} désigne la transformée de Fourier de u . Comme la partie quadratique de la fonctionnelle est indéfinie, 0 n'est pas un minimum local de l'action sur X et il faut trouver une alternative à la méthode du col. L'idée principale pour obtenir un point critique dans X est alors de montrer que sous l'hypothèse d'hyperbolicité de l'origine, l'espace X se décompose en une somme directe $X^+ \oplus X^-$ de telle sorte que la forme quadratique définie par

$$(v, w) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (J\dot{v}(t) - Av(t)) \cdot w(t) dt$$

soit définie positive sur X^+ et définie négative sur X^- . Il s'ensuit que l'origine est un point de selle non dégénéré de Ψ dans X et un *théorème d'enlacement* peut être utilisé pour remplacer le théorème du col pour obtenir une suite de Palais-Smale. La perte de compacité peut être contrôlée par la méthode de concentration-compacité de P. L. Lions. Les détails peuvent être consultés dans [3].

Théorème 4.16. *Sous les hypothèses (A_1) , (A_2) , (G_1) , (G_2) , (G_3) et (G_4) , le système 4.8 possède une solution homocline.*

□

5 Solutions hétéroclines

La recherche de solutions hétéroclines par la méthode variationnelle se base principalement sur la méthode directe du calcul des variations, c'est-à-dire sur la minimisation de la fonctionnelle d'action. On s'attend donc à ce que les arguments soient plus simples que dans la recherche de solutions homoclines. Cependant, d'autres problèmes surgissent, notamment dans le choix de la classe de fonctions sur laquelle définir la fonctionnelle d'action. En particulier, le choix de la topologie sur cette classe de fonctions est parfois délicat.

Dans cette section, nous considérons uniquement des systèmes Lagrangiens du second ordre, le cas des systèmes Hamiltoniens étant techniquement beaucoup plus compliqué et ayant été nettement moins étudié.

5.1 Systèmes autonomes ou périodiques du second ordre

Considérons le Lagrangien

$$L(t, x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : (t, x, y) \rightarrow \frac{1}{2}(|y|^2) + (|x|^2 - 1)^2.$$

La fonctionnelle d'action

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\dot{u}(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} (|u(t)|^2 - 1)^2 dt \quad (5.1)$$

est bien définie sur la classe de fonctions

$$\Gamma_{-1,+1} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid u + 1 \in H^1(\mathbb{R}^-), u - 1 \in H^1(\mathbb{R}^+)\}.$$

En effet, il est aisé de vérifier que pour toute fonction $u \in \Gamma_{-1,+1}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (|u(t)|^2 - 1)^2 dt &= \int_{\mathbb{R}^-} (|u(t)|^2 - 1)^2 dt + \int_{\mathbb{R}^+} (|u(t)|^2 - 1)^2 dt \\ &\leq C \left(\|u + 1\|_{L^2(\mathbb{R}^-)}^2 + \|u - 1\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \right), \end{aligned}$$

où C dépend de $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, si bien que l'action $\mathcal{J}(u)$ est finie. Observons aussi que les éléments de $\Gamma_{-1,+1}$ sont des fonctions qui satisfont $u(\pm\infty) = \pm 1$. Comme \mathcal{J} est une fonctionnelle positive, il est naturel de chercher un minimiseur de \mathcal{J} dans $\Gamma_{-1,+1}$. Il est par ailleurs immédiat de vérifier qu'un minimiseur est une solution hétérocline, joignant -1 à $+1$, de l'équation d'Euler-Lagrange associée

$$-\ddot{u} + 4(u - u^3) = 0. \quad (5.2)$$

Bien sûr, une approche plus élémentaire pour démontrer l'existence d'une telle solution consisterait à étudier le plan des phases, voir la Figure 4 (b). Tout comme dans l'étude des solutions homoclines, nous devons contrôler les pertes de compacité. Pour le Lagrangien L , nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.1. *La fonctionnelle \mathcal{J} définie par (5.1) admet un minimum global dans $\Gamma_{-1,+1}$.*

La preuve de ce théorème consiste à construire une suite minimisante particulière afin de contrôler le manque de compacité dû à l'invariance sous l'action des translations. Les pertes de compacité consistent ici en le fait que les suites minimisantes dans $\Gamma_{-1,+1}$ peuvent converger vers des fonctions qui ne joignent pas -1 et $+1$. Par exemple, si u est un minimiseur dans $\Gamma_{-1,+1}$, $\tau_n u$ est une suite minimisante qui converge ponctuellement vers -1 tandis que $\tau_{-n} u_n$ converge vers $+1$.

Preuve du Théorème 5.1. Considérons une suite minimisante $(u_n)_n \subset \Gamma_{-1,+1}$. Étant donné que $u_n(\pm\infty) = \pm 1$, nous pouvons définir pour tout n

$$x_n = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid u_n(t) = 0\} \quad \text{et} \quad y_n = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid u_n(t) = 0\}.$$

Observons alors que la suite $(v_n)_n$ définie par

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t + x_n) & \text{si } t \leq 0, \\ u_n(t + y_n) & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

est telle que, pour tout n , $v_n(t)t > 0$ pour tout $t \neq 0$ et $\mathcal{J}(v_n) \leq \mathcal{J}(u_n)$. En particulier, la suite $(v_n)_n$ est encore une suite minimisante. En passant éventuellement à des sous-suites et en utilisant l'argument de la diagonale de Cantor, il est à présent aisé de déduire qu'il existe $v \in \Gamma_{-1,+1}$ tel que $v_n + 1 \rightarrow v + 1$ dans $H^1(\mathbb{R}^-)$, $v_n - 1 \rightarrow v - 1$ dans $H^1(\mathbb{R}^+)$ et $v_n \rightarrow v$ uniformément sur les intervalles compacts. La faible semi-continuité inférieure de la fonctionnelle permet finalement de conclure que

$$\mathcal{J}(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(v_n),$$

si bien que v minimise \mathcal{J} sur $\Gamma_{-1,+1}$. □

Remarque 5.2. *Des résultats analogues aux Théorèmes 4.5, 4.8 et 4.11 généralisant le Théorème 5.1 à des équations non-autonomes et aux systèmes peuvent être démontrés pour l'existence de solutions hétéroclines lorsque le potentiel possède exactement deux états d'équilibre au même niveau d'énergie.*

Considérons à présent le cas d'un système autonome

$$\ddot{u} - \nabla V(u) = 0, \quad (5.3)$$

où $V \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ est tel que

(V₄) $V \geq 0$, $\mathcal{M} := V^{-1}(0)$ contient au moins deux points et

$$\inf \{|\xi_1 - \xi_2| \mid \xi_1, \xi_2 \in V^{-1}(0) \quad \text{et} \quad \xi_1 \neq \xi_2\} > 0;$$

(V_5) pour tout $\varepsilon > 0$, $\inf \{V(x) \mid \text{dist}(x, \mathcal{M}) \geq \varepsilon\} > 0$.

Nous cherchons des solutions hétéroclines entre les éléments de \mathcal{M} . Le théorème suivant est un résultat de base.

Théorème 5.3 (Rabinowitz 1989). *Soit $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfaisant (V_4), (V_5) et supposons que $0 \in \mathcal{M}$. Alors le système (5.3) a une solution hétérocline partant de 0 et une autre arrivant en 0.*

Démonstration. Considérons, pour $\xi \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, les classes

$$\Gamma(\xi) = \{u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \mid u(-\infty) = 0, u(+\infty) = \xi\},$$

et définissons les niveaux

$$c(\xi) := \inf_{u \in \Gamma(\xi)} \mathcal{J}(u),$$

où \mathcal{J} est la fonctionnelle d'action

$$\mathcal{J}(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} + V(u(t)) \right) dt.$$

La preuve du théorème consiste à montrer qu'il existe $\zeta \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ tel que

$$c(\zeta) = \min_{\xi \in \mathcal{M} \setminus \{0\}} c(\xi),$$

et $u \in \Gamma(\zeta)$ tel que $\mathcal{J}(u) = c(\zeta)$. En renversant le temps, on obtient une solution hétérocline partant de ζ et arrivant en 0. La preuve est détaillée dans [3]. \square

Si \mathcal{M} contient plus de deux éléments, on ne peut en général pas affirmer qu'il existe une solution hétérocline entre chaque paire d'éléments de \mathcal{M} . Le lecteur s'en convaincra en considérant l'équation du pendule non forcé (4.2). Néanmoins nous avons le résultat suivant que nous énonçons dans un cadre non-autonome. Considérons le système périodique

$$\ddot{u} - \nabla_u V(t, u) = 0, \tag{5.4}$$

où le potentiel V satisfait les hypothèses

(V_6) $V \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est 1-périodique en toutes les variables $t, x_i, i = 1, \dots, n$;

(V_7) $V(t, 0) = 0 < V(t, x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{Z}^N$.

On pourrait bien entendu considérer différentes périodes en chaque variable de V par un changement d'échelle. La fonctionnelle d'action associée à (5.4) est définie par

$$\mathcal{J}(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} + V(t, u(t)) \right) dt.$$

Considérons, pour chaque paire d'éléments $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^N$, la classe de fonctions

$$\Gamma(\xi, \eta) := \{u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \mid u(-\infty) = \xi, u(+\infty) = \eta \text{ et } u' \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Clairement, $\Gamma(\xi, \eta) \subset H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Définissons aussi

$$c(\xi, \eta) := \inf_{u \in \Gamma(\xi, \eta)} \mathcal{J}(u). \tag{5.5}$$

Nous ne pouvons pas garantir que $c(\xi, \eta)$ est atteint par une hétérocline joignant ξ à η . Cependant, il existe toujours une *chaîne d'hétéroclines* de ξ à η réalisant l'infimum sur $\Gamma(\xi, \eta)$.

Théorème 5.4 (Rabinowitz 1991). *Soit $V \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfaisant (V_6) et (V_7) . Pour tout couple $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^N$, $\xi \neq \eta$, il existe un ensemble fini $\{w_0, w_1, \dots, w_j\} \subset \mathbb{Z}^N$ tel que $w_0 = \xi$, $w_j = \eta$, et un ensemble correspondant de solutions hétéroclines v^i du système (5.4) tel que*

$$\mathcal{J}(v^i) = c(w_i, w_{i+1}), \quad v^i \in \Gamma(w_i, w_{i+1}), \quad i = 0, \dots, j-1$$

et

$$\sum_{i=0}^{j-1} \mathcal{J}(v^i) = c(\xi, \eta).$$

□

La démonstration peut être consultée dans [28]. Il est facile de vérifier que chaque élément v_i de la chaîne est une solution *hétérocline de base* c'est-à-dire qu'aucune chaîne d'hétéroclines à plus d'un élément joignant w_i à w_{i+1} n'atteint le niveau $\mathcal{J}(v_i)$. Nous reviendrons sur le Théorème 5.4 dans la Section 6 et nous indiquerons des hypothèse permettant de démontrer l'existence de "vraies" solutions hétéroclines joignant ξ et η .

5.2 Connexions entre orbites périodiques

Dans cette section, nous considérons des solutions hétéroclines doublement asymptotiques à des solutions périodiques du système. Les solutions périodiques qui peuvent être reliées doivent satisfaire certaines propriétés de minimalité et de non dégénérescence.

Considérons le Lagrangien $L(t, x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(t, x) - f(t) \cdot x$ et le système associé

$$\ddot{u} - \nabla_u V(t, u) = f(t), \quad (5.6)$$

où V est un potentiel satisfaisant (V_6) et f est une force extérieure continue 1-périodique de moyenne nulle, i.e. $\int_0^1 f(t) dt = 0$. En minimisant la fonctionnelle d'action

$$\mathcal{J}_1(u) = \int_0^1 \left(\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} + V(t, u(t)) - f(t) \cdot u(t) \right) dt$$

sur l'espace $H_1^1([0, 1])$, on obtient, en argumentant comme dans la preuve du Théorème 3.1, une solution 1-périodique u du système (5.6). Par périodicité du potentiel, si $j \in \mathbb{Z}^N$, $\mathcal{J}_1(u + j) = \mathcal{J}_1(u)$ donc $u + j$ est un minimiseur au même niveau de l'action que u . Notons $c = \mathcal{J}_1(u)$ et

$$\mathcal{M} = \{q \in H_1^1([0, 1]) \mid \mathcal{J}_1(q) = c\}.$$

Pour obtenir des solutions hétéroclines entre les éléments de \mathcal{M} , nous imposons les conditions supplémentaires suivantes :

- (V_8) $V(t, x) - f(t) \cdot x = V(-t, x) - f(-t) \cdot x$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$;
- (N_1) les éléments de \mathcal{M} sont isolés.

Observons que la condition de non dégénérescence (N_1) exclut le cas autonome. Le résultat qui suit est l'analogie du Théorème 5.3.

Théorème 5.5 (Rabinowitz 1994). *Soit $V \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ satisfaisant (V_6) et (V_8) . Supposons de plus que la condition (N_1) est satisfaite. Alors, pour tout $u \in \mathcal{M}$, il existe $v \in \mathcal{M} \setminus \{u\}$ et une solution w de (5.6) telle que $w(t) \rightarrow u(t)$ uniformément lorsque $t \rightarrow -\infty$ et $w(t) \rightarrow v(t)$ uniformément lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

Démonstration. Considérons, pour $u \in \mathcal{M}$, la classe de fonctions

$$\Gamma(u) = \{q \in H_{loc}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} (q(t) - u(t)) = 0 \quad (5.7)$$

$$\text{et } q(t) \rightarrow \mathcal{M} \setminus \{u(t)\} \text{ uniformément lorsque } t \rightarrow +\infty\}. \quad (5.8)$$

Nous ne pouvons pas chercher de solution hétérocline en minimisant simplement la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} + V(t, u(t)) - f(t) \cdot u(t) \right) dt$$

sur $\Gamma(u)$ comme dans la preuve du Théorème 5.3. En effet, évalué sur les éléments de $\Gamma(u)$, \mathcal{J} est en général égale à $+\infty$. L'idée introduite par Rabinowitz est de définir une fonctionnelle renormalisée de la façon suivante. Pour $q \in H_{loc}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ et $n \in \mathbb{Z}$, définissons

$$a_n(q) = \int_n^{n+1} (L(q(t)) - L(u(t))) dt.$$

Il est aisé de vérifier que sous l'hypothèse de réversibilité (V_8) , $a_n(q) \geq 0$. Il y a donc un sens à définir la fonctionnelle

$$\mathcal{J}^*(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(q),$$

même si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} (L(q(t)) - L(u(t))) dt$ n'existe pas. La démonstration du théorème consiste à présent à minimiser \mathcal{J}^* sur la classe $\Gamma(u)$. Nous renvoyons à [29] pour la preuve de l'existence du minimum. Montrons finalement qu'un minimiseur w est une solution du système (5.6). Soit $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$. Comme w est un minimiseur, nous avons, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{J}^*(w + s\varphi) \geq \mathcal{J}^*(w).$$

Supposons que le support de φ se trouve dans l'intervalle $[-n, n]$. Comme $\mathcal{J}^*(w + s\varphi)$ est une fonction de classe C^1 en la variable s , nous obtenons

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{J}^*(w + s\varphi) = \int_{-n}^n (\dot{w}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + \nabla_x V(t, w(t)) \cdot \varphi(t) - f(t) \cdot \varphi(t)) dt = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{w}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + \nabla_x V(t, w(t)) \cdot \varphi(t) - f(t) \cdot \varphi(t)) dt = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ et par un argument classique du calcul des variations, w est une solution de (5.6). \square

Remarque 5.6. *Sans l'hypothèse de réversibilité (V_8) , on ne sait pas si la conclusion du Théorème 5.5 reste vraie. Un résultat dû à Bosetto et Serra [2] montre que le Théorème est encore valable dans le cas scalaire. Le cas vectoriel est ouvert.*

6 Solutions multi-bosses et dynamique chaotique

Les résultats que nous avons présentés dans les deux sections précédentes établissent l'existence d'au moins une solution homocline ou hétérocline d'un système Hamiltonien donné. Nous considérons dans cette section des résultats de multiplicité. Par ailleurs, l'existence d'un grand nombre d'orbites homoclines et hétéroclines est fréquemment l'indice d'une dynamique chaotique.

6.1 Homoclines et hétéroclines multi-bosses

Les théorèmes qui suivent illustrent le type de résultats connus concernant la multiplicité des solutions. Ils sont donnés sans démonstration. Considérons le potentiel

$$V(t, x) = -\frac{1}{2}L(t)x \cdot x + W(t, x),$$

où L est 1-périodique et satisfait (L_1) , $W \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ est 1-périodique, satisfait (W_1) et $\nabla_{xx}W(t, 0) = 0$. Définissons, comme dans le Théorème 4.5, le niveau de col c associé à la fonctionnelle d'action

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\dot{u}(t)|^2 + L(t)u(t) \cdot u(t)) dt - \int_{\mathbb{R}} W(t, u(t)) dt.$$

Comme nous l'avons montré dans la Section 4, la condition de Palais-Smale n'est pas vérifiée au niveau c , i.e. il existe des suites $(u_n)_n \subset H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ telles que $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c$, $\delta\mathcal{J}(u_n) \rightarrow 0$ mais ne possédant pas de sous-suite convergente. En fait, il en est de même en tous les niveaux kc , où $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Montrons-le pour $k = 2$. Supposons que $(u_n)_n$ est une suite de Palais-Smale au niveau c . Comme le potentiel est 1-périodique en t , nous avons $\mathcal{J}(\tau_j u_n) = \mathcal{J}(u_n)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Dès lors, si $j(n) \in \mathbb{Z}$ est tel que $j(n) \rightarrow +\infty$, nous avons, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\mathcal{J}(u_n + \tau_{j(n)} u_n) \rightarrow 2c \quad \text{et} \quad \mathcal{J}'(u_n + \tau_{j(n)} u_n) \rightarrow 0.$$

Les niveaux kc jouent néanmoins un rôle clé dans l'étude des solutions homoclines. Dans le théorème suivant, \mathcal{K}^μ désigne l'ensemble des points critiques de \mathcal{J} aux niveaux plus petits que μ et \mathcal{K}_ν^μ l'ensemble des points critiques dont le niveau est compris entre ν et μ .

Théorème 6.1 (Coti Zelati-Rabinowitz 1991). *Supposons que*

(N_2) *il existe $\alpha > 0$ tel que le quotient $\mathcal{K}^{c+\alpha}/\mathbb{Z}$ est fini.*

Alors c est un niveau critique de \mathcal{J} et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathcal{K}_{nc-\alpha}^{nc+2}/\mathbb{Z}$ est infini.

□

La condition (N_2) est de nouveau une condition de non dégénérescence qui exclut le cas autonome. Des exemples simples montrent par ailleurs que si elle n'est pas satisfaite, la conclusion du théorème est fautive. Observons aussi que si (N_2) n'a pas lieu, le système possède tout de même une infinité de solutions homoclines. Un énoncé plus précis du Théorème 6.1 décrivant les solutions obtenues est donné dans [8]. Qualitativement, une solution dans $\mathcal{K}_{nc-\alpha}^{nc+2}$ ressemble à une somme de n copies translatées d'homoclines de base, $\sum_{i=1}^n \tau_{\ell_i} v_i$, où v_1, \dots, v_n sont des solutions homoclines au niveau c et les différences $|\ell(j) - \ell(i)|$ sont suffisamment grandes. Ces solutions ont donc le profil d'une fonction à n bosses.

Le théorème précédent est à comparer avec un résultat classique en théorie des systèmes dynamiques [18] qui affirme que si les variétés stables et instables pour l'application de Poincaré s'intersectent transversalement en un point homocline, il existe un ensemble très riche (et ayant une structure complexe) de solutions périodiques, homoclines et hétéroclines dans un voisinage de ce point. Le rôle de l'hypothèse (N_2) dans l'approche variationnelle est analogue à la condition de transversalité. Remarquons qu'en pratique la condition (N_2) ou la transversalité sont difficiles à vérifier.

Revenons à présent sur le Théorème 5.4 et reprenons les notations introduites dans son énoncé. En imposant une condition de non dégénérescence, il est possible de construire de "vraies" solutions hétéroclines du système

$$\ddot{u} - \nabla_u V(t, u) = 0, \tag{6.1}$$

qui restent dans un voisinage de chaque sommet w_1, \dots, w_j de la chaîne pendant des durées prescrites T_1, \dots, T_j arbitrairement longues. Définissons, pour $\xi \neq \eta \in \mathbb{Z}^N$,

$$\mathcal{S}(\xi, \eta) = \{q(0) \in \mathbb{R}^N \mid q \in \Gamma(\xi, \eta), \mathcal{J}(q) = c(\xi, \eta)\}.$$

Si $q(0) \in \mathcal{S}(\xi, \eta)$, alors $q(n) \in \mathcal{S}(\xi, \eta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\xi, \eta \in \bar{\mathcal{S}}(\xi, \eta)$. Notons respectivement $C_\xi(\xi, \eta)$ et $C_\eta(\xi, \eta)$ les composantes connexes de ξ et η dans $\bar{\mathcal{S}}(\xi, \eta)$. Supposons que

(N_3) $C_{w_i}(w_i, w_{i+1}) = \{w_i\}$ et $C_{w_{i+1}}(w_i, w_{i+1}) = \{w_{i+1}\}$, pour $i = 1, \dots, j-1$.

Il est démontré dans [31] que si cette condition n'est pas remplie, alors

$$C_{w_i}(w_i, w_{i+1}) = C_{w_{i+1}}(w_i, w_{i+1}),$$

ce qui peut être interprété comme un cas fortement dégénéré.

Théorème 6.2 (Strobel 1994). *Sous les hypothèse du Théorème 5.4, considérons une chaîne d'hétéroclines de base $\{v_1, \dots, v_j\}$ passant par les sommets $\{\xi = w_1, \dots, w_j = \eta\}$. Supposons que la condition (N_3) est satisfaite. Alors le système (6.1) possède une infinité de solutions hétéroclines allant de ξ à η .*

□

La preuve peut être consultée dans [31, 3]. Une description précise des solutions obtenues dans ce théorème est donnée dans [31]. Qualitativement, ces solutions décrivent des transitions simples de sommet en sommet et restent pendant un temps fixé arbitrairement long dans un voisinage de chaque sommet entre les transitions. Elles sont donc qualifiées de solutions hétéroclines multi-bosses.

6.2 Un pendule forcé chaotique

Considérons un pendule forcé

$$\ddot{u} + \sin u = f(t), \tag{6.2}$$

où $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ est une fonction 1-périodique de moyenne nulle. Soit

$$\mathcal{J}_1(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} |\dot{u}(t)|^2 + \cos u(t) + f(t)u(t) \right) dt$$

la fonctionnelle d'action associée définie sur $H_1^1([0, 1])$. Le Théorème 3.1 affirme l'existence d'un minimiseur de \mathcal{J}_1 sur $H_1^1([0, 1])$. Étant donnée la périodicité du potentiel, l'ensemble des minimiseurs forme une famille ordonnée. Le caractère ordonné de cette famille se déduit du fait que deux minimiseurs ne peuvent pas se croiser. Cette observation est propre au cas scalaire.

Définition 6.3. *Deux minimiseurs u, v de \mathcal{J}_1 sur $H_1^1([0, 1])$ sont dits consécutifs si*

- (1) $u(t) < v(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$;
- (2) si $w \in H_1^1([0, 1])$ est tel que $u(t) \leq w(t) \leq v(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\mathcal{J}_1(w) = \inf_{H_1^1} \mathcal{J}_1$, alors $w \in \{u, v\}$.

Observons que deux minimiseurs consécutifs ne doivent pas nécessairement être isolés dans H_1^1 . Bosetto et Serra [2] ont démontrés que si le système (6.2) satisfaisant une condition de non dégénérescence et qu'il existe une paire de minimiseurs consécutifs, alors la dynamique est chaotique.

Soient u_0, u_1 des minimiseurs consécutifs. Notons

$$\Gamma_0 = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) \mid u_0(t) \leq u(t) \leq u_1(t), \quad u(-\infty) = u_0 \quad \text{et} \quad u(+\infty) = u_1\}$$

et

$$\Gamma_1 = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) \mid u_0(t) \leq u(t) \leq u_1(t), \quad u(-\infty) = u_1 \quad \text{et} \quad u(+\infty) = u_0\}.$$

Reprenons la fonctionnelle renormalisée

$$\mathcal{J}^*(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(u),$$

où

$$a_n(u) = \int_n^{n+1} L(u(t)) dt - \inf_{H_1^1} \mathcal{J}_1,$$

introduite dans la preuve du Théorème 5.5. Comme nous ne supposons pas le problème réversible, il n'est plus vrai que $a_n(u) \geq 0$ pour tout $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{Z}$. On peut néanmoins démontrer que la fonctionnelle \mathcal{J}^* est bien définie sur Γ_0 ou Γ_1 . Introduisons encore les deux niveaux

$$c_0 = \inf_{u \in \Gamma_0} \mathcal{J}^*(u) \quad \text{et} \quad c_1 = \inf_{u \in \Gamma_1} \mathcal{J}^*(u)$$

et les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \{u(0) \in \mathbb{R} \mid u \in \Gamma_0, \mathcal{J}^*(u) = c_0\}, \\ \mathcal{S}_1 &= \{u(0) \in \mathbb{R} \mid u \in \Gamma_1, \mathcal{J}^*(u) = c_1\}. \end{aligned}$$

Si le problème est autonome, il est clair que $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_1 =]u_0(0), u_1(0)[$. La condition de non dégénérescence exclut à nouveau ce cas :

$$(N_4) \quad \mathcal{S}_0 \neq]u_0(0), u_1(0)[\quad \text{et} \quad \mathcal{S}_1 \neq]u_0(0), u_1(0)[.$$

Cette condition est à comparer à (N3). Dans les théorèmes suivants, u_i , où $i \in \mathbb{Z}$, désigne u_0 si i est pair et u_1 sinon.

Théorème 6.4 (Bosetto-Serra 2000). *Supposons que u_0 et u_1 sont des minimiseurs consécutifs et que la condition (N_4) est satisfaite. Alors, pour tout δ suffisamment petit, il existe $m(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute suite $(p_n)_n \subset \mathbb{Z}$ tel que $p_{n+1} - p_n \geq 4m(\delta)$, pour tout $i < j \in \mathbb{Z}$, il existe une solution u de (6.2) satisfaisant $u(t) \rightarrow u_i(t)$ uniformément lorsque $t \rightarrow -\infty$ et $u(t) \rightarrow u_{j+1}(t)$ uniformément lorsque $t \rightarrow +\infty$,*

$$u_0(t) < u(t) < u_1(t), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

et, pour $n = i, \dots, j$,

$$|u(p_n - m) - u_n(p_n - m)| \leq \delta \quad \text{et} \quad |u(p_n + m) - u_{n+1}(p_n + m)| \leq \delta.$$

□

Ce théorème établit l'existence d'une infinité de solutions multi-bosses (homoclines ou hétéroclines). Un passage à la limite mène au résultat suivant.

Théorème 6.5 (Bosetto-Serra 2000). *Supposons que u_0 et u_1 sont des minimiseurs consécutifs et que la condition (N_4) est satisfaite. Alors, pour tout δ suffisamment petit, il existe $m(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute suite $(p_n)_n \subset \mathbb{Z}$ tel que $p_{n+1} - p_n \geq 4m(\delta)$, il existe une solution u de (6.2) satisfaisant*

$$u_0(t) < u(t) < u_1(t), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|u(p_n - m) - u_n(p_n - m)| \leq \delta \quad \text{et} \quad |u(p_n + m) - u_{n+1}(p_n + m)| \leq \delta.$$

□

Ce théorème affirme l'existence d'un ensemble non dénombrable de solutions bornées de (6.2). En particulier, si on choisit une suite $(p_n)_n$ non périodique, on obtient une solution bornée non périodique. Il est également possible de montrer un résultat similaire aux précédents concernant des solutions périodiques de périodes arbitrairement grandes. Ces deux théorèmes décrivent quelques caractéristiques principales d'une dynamique chaotique : la sensibilité aux conditions initiales et

l'existence d'un ensemble non dénombrable de solutions (géométriquement distinctes) bornées non périodiques. La conclusion du Théorème 6.4 permet de montrer que l'application de Poincaré associée possède une entropie topologique positive (voir [13, 37] pour la définition de l'entropie) tandis que la conclusion du Théorème 6.5 est le point de départ pour construire une dynamique symbolique de solutions (voir [32] pour un exemple de telle construction). Ces deux propriétés sont typiques des systèmes chaotiques.

7 Conclusion

Ce dossier contient un aperçu des méthodes modernes du calcul des variations appliquées à la recherche de solutions périodiques, homoclines ou hétéroclines pour des systèmes Hamiltoniens (de dimension finie). Nous avons présentés principalement des résultats de base en mettant l'accent sur les idées sous-jacentes sans chercher à énoncer les hypothèses optimales. Nous renvoyons le lecteur aux articles originaux pour des résultats plus complets et pour les détails techniques.

Le sujet étant très vaste, il est impossible de donner ici une liste complète de références sur le sujet. Toutefois, nous recommandons comme point de départ les lectures [9, 22, 35]. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur les développements récents dans le sujet pourront consulter les articles [1, 3, 33] ainsi que les références reprises dans les bibliographies respectives. Pour approfondir les aspects d'analyse fonctionnelle utilisés dans ce dossier, nous renvoyons à [4, 38] et pour les théorèmes de minimax à [11, 25, 39].

Malgré les centaines de publications parues ces dernières années traitant des systèmes Hamiltoniens, il reste encore de nombreuses questions à explorer et de beau défi en perspective. Mentionnons les problèmes ouverts suivants :

1. Soient $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N})$ et $S = H^{-1}(c)$. Si S est le bord d'un ensemble compact strictement convexe, contient-elle au moins N orbites périodiques du système $J\dot{u} = \nabla H(u)$?

2. Soit $f \in C([0, T])$ de moyenne nulle. Existe-t-il toujours $c(f) > 0$ tel que, pour tout $|\varepsilon| < c(f)$, l'équation

$$\ddot{u} + a \sin u = f(t) + \varepsilon$$

possède une solution T -périodique ? Le résultat est vrai génériquement (voir [21]).

3. Soit le système du second ordre (5.6). Existe-t-il des connections hétéroclines entre solutions périodiques lorsque le système n'est pas réversible dans le temps ?

Références

- [1] T. Bartsch, A. Szulkin, Hamiltonian systems : periodic and homoclinic solutions by variational methods. Handbook of differential equations : ordinary differential equations. Vol. II, 77–146, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.
- [2] E. Bosetto, E. Serra, A variational approach to chaotic dynamics in periodically forced nonlinear oscillators. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 17 (2000), no. 6, 673–709.
- [3] D. Bonheure, L. Sanchez, Heteroclinic Orbits for Some classes of Second and Fourth Order Differential Equations, Handbook of differential equations : ordinary differential equations. Vol. III, 103–202, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.
- [4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. xiv+234 pp.
- [5] P. Caldiroli, M. Nolasco, Multiple homoclinic solutions for a class of autonomous singular systems in \mathbf{R}^2 . Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 15 (1998), no. 1, 113–125.

- [6] F. H. Clarke, A classical variational principle for periodic Hamiltonian trajectories. Proc. Amer. Math. Soc. 76 (1979), no. 1, 186–188.
- [7] V. Coti Zelati, I. Ekeland, E. Séré, A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems. Math. Ann. 288 (1990), no. 1, 133–160.
- [8] V. Coti Zelati, P. H. Rabinowitz, Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials. J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), no. 4, 693–727.
- [9] I. Ekeland, Convexity methods in Hamiltonian mechanics. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 19. Springer-Verlag, Berlin, 1990. x+247 pp.
- [10] I. Ekeland, J.-M. Lasry, On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface. Ann. of Math. (2) 112 (1980), no. 2, 283–319.
- [11] I. Ekeland, R. Temam, Analyse convexe et problèmes variationnels. Collection Études Mathématiques. Dunod; Gauthier-Villars, Paris-Brussels-Montreal, 1974. x+340 pp.
- [12] V. L. Ginzburg, An embedding $S^{2n-1} \rightarrow R^{2n}$, $2n - 1 \geq 7$, whose Hamiltonian flow has no periodic trajectories. Internat. Math. Res. Notices 1995, no. 2, 83–97
- [13] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Applied Mathematical Sciences, 42. Springer-Verlag, New York, 1983. xvi+453 pp.
- [14] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in R^n . Mathematical analysis and applications, Part A, pp. 369–402, Adv. in Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, New York-London, 1981.
- [15] W. B. Gordon, Conservative dynamical systems involving strong forces. Trans. Amer. Math. Soc. 204 (1975), 113–135.
- [16] M. Herman, Examples of compact hypersurfaces in R^{2p} , $2p \geq 6$, with no periodic orbits. Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S'Agaró, 1995), 126, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [17] P. Korman, A. C. Lazer, Homoclinic orbits for a class of symmetric Hamiltonian systems. Electron. J. Differential Equations 1994, No. 01, approx. 10 pp.
- [18] U. Kirchgraber, D. Stoffer, Chaotic behaviour in simple dynamical systems. SIAM Rev. 32 (1990), no. 3, 424–452.
- [19] J. Mawhin, Le principe de moindre action : de la théologie au calcul, Bull. Cl. Sci. Acad. Royale de Belgique 6 (1992), no. 3, 413–427.
- [20] J. Mawhin, Le principe de moindre action et la finalité, revue d'Ethique et de Théologie Morale “Le Supplément” 205 (1998), 49–89.
- [21] J. Mawhin, Global results for the forced pendulum equation. Handbook of differential equations, 533–589, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2004. J. Mawhin,
- [22] J. Mawhin, M. Willem, Critical point theory and Hamiltonian systems. Applied Mathematical Sciences, 74. Springer-Verlag, New York, 1989. xiv+277 pp.
- [23] W. Omana, M. Willem, Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems. Differential Integral Equations 5 (1992), no. 5, 1115–1120.
- [24] P. H. Rabinowitz, Periodic solutions of Hamiltonian systems. Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), no. 2, 157–184.
- [25] P. H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. 1986. viii+100 pp.
- [26] P. H. Rabinowitz, Periodic and heteroclinic orbits for a periodic Hamiltonian system. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 6 (1989), no. 5, 331–346.

- [27] P. H. Rabinowitz, Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 114 (1990), no. 1-2, 33–38.
- [28] P. H. Rabinowitz, A variational approach to heteroclinic orbits for a class of Hamiltonian systems. *Frontiers in pure and applied mathematics*, 267–278, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [29] P. H. Rabinowitz, Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 14 (1994), no. 4, 817–829.
- [30] P. H. Rabinowitz, Homoclinics for a singular Hamiltonian system. *Geometric analysis and the calculus of variations*, 267–296, Int. Press, Cambridge, MA, 1996.
- [31] P. H. Rabinowitz, On a theorem of Strobil. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 12 (2001), no. 4, 399–415.
- [32] P. H. Rabinowitz, Solutions of a Lagrangian system on \mathbf{T}^2 . *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 96 (1999), no. 11, 6037–6041.
- [33] P. H. Rabinowitz, Variational methods for Hamiltonian systems. *Handbook of dynamical systems*, Vol. 1A, 1091–1127, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [34] P. H. Rabinowitz, K. Tanaka, Some results on connecting orbits for a class of Hamiltonian systems. *Math. Z.* 206 (1991), no. 3, 473–499.
- [35] M. Struwe, Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlag, Berlin, 1990. xiv+244 pp.
- [36] M. Struwe, Existence of periodic solutions of Hamiltonian systems on almost every energy surface. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* 20 (1990), no. 2, 49–58.
- [37] W. Szlenk, An introduction to the theory of smooth dynamical systems. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984. x+369 pp.
- [38] M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, Paris, 2003. 136 pp.
- [39] M. Willem, Minimax theorems. *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. x+162 pp.