NOM:	Numéro:	
Prénom:		

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

UCLouvain – Géométrie – Session de Septembre – 30/08/2024

Durée 2h30 – répondre dans les cadres et utiliser le verso comme brouillon (non lu)

Question 1 – Géométrie analytique dans le plan

1.a. Donnez l'équation cartésienne et le nom de la conique rassemblant tous les points dont la distance à la droite $x = 1$ est la moitié de la distance au point de coordonnées $(4; 0)$.

Equation: $x^2 - \frac{y^2}{3} = 4$ Nom: Hyperbole

Donnez l'expression de chacune des deux distances, et dessinez la conique dans son repère d'axes.

La distance à la droite est $d_1 = |x - 1|$ et la distance au point est $d_2 = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$.

Imposer $d_1 = d_2/2$ revient à imposer $d_1^2 = d_2^2/4$, menant à $3x^2 - y^2 = 12$.

On reconnait l'équation d'une hyperbole.

1.b. Connaissant les points $A \equiv (4\,;\,5)$ et $B \equiv (7\,;\,2)$ et sachant aussi que l'aire du triangle ABC vaut 6, déterminez l'abscisse du point C dont l'ordonnée vaut 4.

$C \equiv \boxed{(1\,;\,4) \text{ ou } (9\,;\,4)}$

Justifiez brièvement ci-dessous. (Il y a deux réponses correctes.) Indice: il y a une relation entre l'aire du triangle ABC et la distance du point C à la droite AB.

La distance d_C du point C à la droite AB est une hauteur du triangle ABC.

Ayant déterminé l'équation de la droite $AB \equiv x + y = 9$, on déduit que: $d_C = \pm\frac{x+y-9}{\sqrt{2}}$.

Selon la formule de calcul de l'aire d'un triangle: $Aire = \frac{1}{2}\overline{AB}\, d_C$

où la base du triangle est la longueur du segment $\overline{AB} = \sqrt{(7-4)^2 + (2-5)^2} = 3\sqrt{2}$

.

Au final, on calcule: $Aire = 6 = \pm\frac{1}{2}3\sqrt{2}\,\frac{x+4-9}{\sqrt{2}}$

UCLouvain – Géométrie – Session de Septembre – 30/08/2024
Durée 2h30 – répondre dans les cadres et utiliser le verso comme brouillon (non lu)

Question 2 – Géométrie analytique dans l'espace

Les deux sous-questions qui suivent sont indépendantes, mais elles utilisent les mêmes trois points:

$$A \equiv \big(-7\,;\,10\,;\,5\big) \qquad B \equiv \big(2\,;\,4\,;\,2\big) \qquad C \equiv \big(3\,;\,10\,;\,7\big)$$

Dans chaque cas, faites un schéma approximatif au brouillon avant d'entamer la solution.

2.a. Déterminez les coordonnées du point P sachant qu'il appartient à la droite AB et que le vecteur $\overrightarrow{CP}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$P \equiv \big(-1\,;\,6\,;\,3\big)$$

Justifiez brièvement.

Puisque P appartient à la droite AB, on peut écrire que $\overrightarrow{AP} = s\,\overrightarrow{AB}$

Puisque les vecteurs sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB}\cdot\Big(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}\Big) = \overrightarrow{AB}\cdot\Big(\overrightarrow{CA}+s\,\overrightarrow{AB}\Big) = 0$$

En substituant: $\big(9\,;\,-6\,;\,-3\big)\cdot\big(-10+9s\,;\,-6s\,;\,-2-3s\big) = -84+126s = 0$

Ceci mène à $s = \dfrac{2}{3}$ et au résultat fourni ci-dessus.

2.b. Déterminez les coordonnées du point Q sachant qu'il est équi-distant des points A et C et qu'il appartient à la droite BC:

$$Q \equiv \left(\frac{2}{5}\,;\,-\frac{28}{5}\,;\,-6\right)$$

Justifiez brièvement.

Le point Q appartient donc au plan qui passe par le milieu de AC et qui est perpendiculaire à ce segment. L'équation cartésienne de ce plan est donc: $5x + z = -4$.

Puisque le point Q appartient aussi à la droite BC, on peut écrire que $\overrightarrow{BQ} = t\,\overrightarrow{BC}$

et donc que $Q \equiv \big(2+t\,;\,4+6t\,;\,2+5t\big)$.

En combinant ces deux conditions, on trouve $t = -\dfrac{8}{5}$, menant au-résultat repris ci-dessus.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

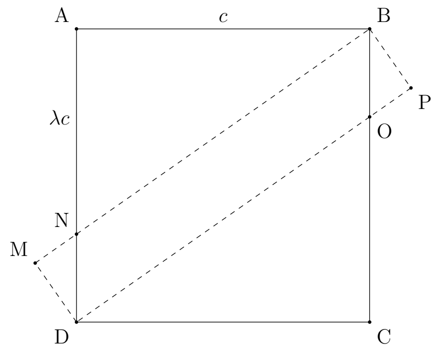
UCLouvain – Géométrie – Session de Septembre – 30/08/2024

Durée 2h30 – répondre dans les cadres et utiliser le verso comme brouillon (non lu)

Question 3 – Géométrie synthétique (1) : "rapport d'aires paramétrée"

Dans un carré $ABCD$ de longueur de côté c, le point N du côté AD est à distance λc du sommet A, où $0 < \lambda < 1$ est un réel. Le rectangle $BPDM$ est construit de sorte que le segment BN est inclus dans un de ses côtés.

L'objectif est de déterminer le rapport des aires du rectangle et du carré, en fonction du réel λ.



3.a. Calculer l'aire $\mathcal{Q}$ du quadrilatère $NBOD$, en fonction de c et λ.

$NBOD$ est un parallélogramme de base $[ND]$ et de hauteur $[DC]$.

$\mathcal{Q} = |ND| \cdot |DC|$ avec $|ND| = |AD| - |AN| = (1-\lambda)c$ et $|DC| = c$.

$$\mathcal{Q} = \boxed{(1-\lambda)c^2}$$

3.b. Montrer que les triangles ABN et MDN sont semblables.

L'angle $\widehat{NAB}$ est celui d'un carré et l'angle $\widehat{NMD}$ est celui d'un rectangle. Les deux triangles sont donc rectangles. Il suffit de trouver deux autres angles de même amplitude.

Par construction, les angles $\widehat{ANB}$ et $\widehat{MND}$ sont opposés par le sommet. La thèse s'en suit.

3.c. Calculer le rapport de similitude ρ du triangle ABN vers le triangle MDN, en fonction de λ.

$\rho(\lambda) = \frac{|ND|}{|NB|}$, où $|ND| = (1-\lambda)c$ comme en (3.a).

Par Pythagore, $|NB|^2 = |AN|^2 + |AB|^2 = (1+\lambda^2)c^2$.

$$\rho(\lambda) = \boxed{\frac{1-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}}$$

3.d. Déterminer le rapport R égal à l'aire du rectangle $BPDM$ divisée par l'aire du carré $ABCD$.

(Utilisez ρ en paramètre si vous n'avez pas trouvé sa valeur à la question 3.c.)

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(BPDM) &= \mathcal{Q} + \big(\text{Aire}(MDN) + \text{Aire}(PBO)\big) \\
&= \mathcal{Q} + 2 \cdot \text{Aire}(MDN) \\
&= \mathcal{Q} + |MN| \cdot |MD| \;=\; \mathcal{Q} + \rho^2 \cdot |AN| \cdot |AB| \\
&= (1-\lambda)c^2 + \frac{(1-\lambda)^2}{1+\lambda^2}\lambda c^2 \;=\; \frac{(1-\lambda)}{1+\lambda^2}\big((1+\lambda^2) + (1-\lambda)\lambda\big) \cdot c^2
\end{aligned}$$

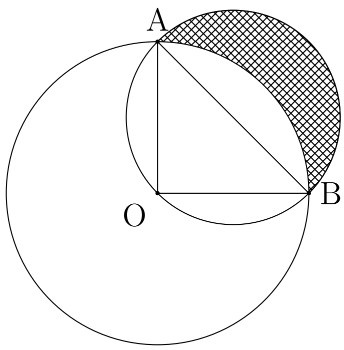
$$R = \boxed{\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN **UCLouvain – Géométrie – Session de Septembre – 30/08/2024**
Durée 2h30 – répondre dans les cadres et utiliser le verso comme brouillon (non lu)

Question 4 – Géométrie synthétique (2) : aire d'une lunule

La surface plane hachurée ci-contre est une lunule construite à partir d'un triangle ABO isocèle et rectangle en O. Cette lunule est délimitée par deux arcs de cercles rejoignant les sommets A et B du triangle. Un de ces arcs de cercle est une partie du cercle de centre O passant par A et B, et l'autre est une partie du cercle circonscrit au triangle ABO.

L'objectif est de déterminer l'aire L de la lunule à partir de l'aire du triangle ABO qui est donnée plus bas.



4.a. Sans calcul ni démonstration, énoncer clairement et succinctement les étapes clés d'une résolution du problème. Numéroter ces étapes dans l'ordre du raisonnement proposé.

L'aire L de la lunule vaut l'aire T du triangle ABO plus l'aire D du demi disque de diamètre $[AB]$ moins l'aire Q du quart de disque de centre O et de rayon $[OA]$.

1. Déduire les longueurs des côtés du triangle ABO à partir de T.
2. Déterminer les rayons des deux disques mentionnés pour obtenir D et Q.
3. Calculer $L = T + D - Q$.

4.b. Suivre point par point le raisonnement décrit à la sous-question précédente afin de calculer l'aire de la lunule sachant que l'aire du triangle ABO vaut 8 cm^2. Justifier soigneusement.

On pose R et r les rayons respectifs du grand cercle (de centre O passant par A et B) et du petit cercle (circonscrit au triangle AOB).

$L = \boxed{8 \text{ cm}^2}$

1. $T = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot |OA|^2$ car le triangle est isocèle et donc $|OA| = 4\,\text{cm}$. Comme la triangle est aussi rectangle, $2|OA|^2 = |AB|^2$ par Pythagore, et donc $|AB| = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.
2. $R = |OA| = 4\,\text{cm}$. Comme le triangle est rectangle son hypoténuse est le diamètre du petit cercle. On a donc $r = |AB|/2 = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$.

   On calcule $D = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = 4\pi\,\text{cm}^2$ et aussi $Q = \frac{1}{4} \cdot \pi R^2 = 4\pi\,\text{cm}^2$.
3. On en conclut que $L = 8\,\text{cm}^2 + 4\pi\,\text{cm}^2 - 4\pi\,\text{cm}^2 = 8\,\text{cm}^2$.

Plus directement, dans la triangle on a $2R^2 = (2r)^2$ et donc $D = Q$. Ainsi, $L = T$.