ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN UCLouvain - Examen d'admission **Analyse - Septembre 2025**	NOM: PRÉNOM: NUMÉRO:

Informations importantes:

- **Les calculatrices, téléphones portables, montres connectées et instruments similaires sont strictement interdits.**
- **Inscrivez vos NOM (en majuscules), Prénom et Numéro sur la première page; et seulement votre NOM sur les autres.**
- **Ne dégrafez pas les feuilles du questionnaire.**
- **Les cadres sont pour les réponses finales et les développements présentées de façon claire et lisible. Il convient donc parfois de faire un brouillon avant de recopier votre réponse dans un cadre.**
- **Lorsqu'une question comporte un cadre pour la réponse finale et un cadre pour le développement, il est attendu que vous indiquiez à la fois votre réponse finale et votre développement dans ces cadres. Une réponse finale sans développement ou un développement sans réponse finale ne seront pas acceptés.**
- **Si vous avez besoin de plus de place, (i) utilisez le CADRE DE LA DERNIERE PAGE et (ii) indiquez le clairement dans le bas du cadre initialement prévu pour la réponse.**

Convention de notation: *Nous utilisons* e^x *ou* $\exp(x)$ *pour la fonction exponentielle,* $\tan(x)$ *pour la fonction tangente,* $\ln(x)$ *pour le logarithme Népérien,* $\sin^2(x)$ *pour le carré de* $\sin(x)$ *(et idem pour les autres fonctions).*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN UCLouvain - Examen d'admission **Analyse - Septembre 2025**	NOM: (inutile d'inscrire le prénom et le numéro ici)

Question 1: Étude de fonction

On considère la fonction $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \ln^2(x) \ .$$

Aide: $\lim_{y\to 0} y^p \ln(y) = 0$ pour $p > 0$, $e \simeq 2.72$, $\frac{1}{e} \simeq 0.368$ et $\ln(2) \simeq 0.693$.

a) Obtenez le domaine de définition $\mathbb{D}$. Obtenez aussi la/les racine(s) de f s'il y en a.

• Examinons d'abord le comportement de f en $x \to 0$ car besoin pour l'esquisse!

$\lim_{x\to 0} x \ln^2(x) = \lim_{x\to 0} (\sqrt{x} \ln(x))^2 = 0 \cdot 0 = 0$ avec l'aide

↳ $\mathbb{D} \equiv]0, \infty[$ et avec $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$f = 0$ lorsque $\ln(x) = 0 \iff x = 1$ est la racine

b) Obtenez la dérivée première f'. Obtenez aussi la/les racine(s) de f' s'il y en a.

$f'(x) = \ln^2(x) + x \cdot 2 \ln(x) \frac{1}{x} = \ln^2(x) + 2 \ln(x)$

$= \ln(x)(\ln(x) + 2)$

$f' = 0$ lorsque $\ln(x) = 0$ et $\ln(x) = -2 \iff x = 1$ et $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

↳ les racines sont $x = 1$ et $x = \frac{1}{e^2} \simeq (0.368)^2 \simeq 0.135$

c) Obtenez la dérivée seconde f''. Obtenez aussi la/les racine(s) de f'' s'il y en a.

$f''(x) = 2 \ln(x) \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln(x) + 1)$

$f'' = 0$ lorsque $\ln(x) = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0.368$

d) Réalisez le **tableau de variation de la fonction** en utilisant un ordre logique présentant d'abord f', puis f'', pour conclure sur les variations de f; avec indication des zones de croissance, décroissance, et signe de la concavité. Les valeurs de x qui annulent f' et/ou f'' et/ou f doivent aussi clairement apparaître dans votre tableau!

	0		$\frac{1}{e^2} \simeq 0.135$		$\frac{1}{e} \simeq 0.368$		1	
f'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\lim = 0$	$\nearrow$ $\cap$	max $\cap$	$\searrow$ $\cap$	$\searrow$ inflexion	$\searrow$ $\cup$	min $\cup$	$\nearrow$ $\cup$

e) Sur base des résultats précédents, esquissez proprement, avec des axes chiffrés, le graphe de la fonction f pour la partie de $\mathbb{D}$ avec $x \leq 2$. Veillez à bien y indiquer la position des points remarquables (racine(s), extremum/ma, point(s) d'inflexion), et d'asymptote(s) s'il y en a. On attend aussi la bonne valeur de f aux points remarquables!

En $x = \frac{1}{e}$: $f = \frac{1}{e} \ln^2\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\left(\underbrace{\ln(1)}_{0} - \underbrace{\ln(e)}_{1}\right)^2 = \frac{1}{e} \simeq 0.368$

En $x = \frac{1}{e^2}$: $f = \frac{1}{e^2} \ln^2\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2}\left(\underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(e^2)\right)^2 = \frac{1}{e^2}\left(2\underbrace{\ln(e)}_{1}\right)^2 = \frac{4}{e^2} \simeq 0.542$

En $x = 2$: $f = 2 \ln^2(2) = 2 \times (0.693)^2 \simeq 2 \times 0.480 \simeq 0.960$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN UCLouvain - Examen d'admission **Analyse - Septembre 2025**	NOM: (inutile d'inscrire le prénom et le numéro ici)

Question 1: Étude de fonction

On considère la fonction $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \ln^2(x) \ .$$

Aide: $\lim_{y\to 0} y^p \ln(y) = 0$ pour $p > 0$, $e \simeq 2.72$, $\frac{1}{e} \simeq 0.368$ et $\ln(2) \simeq 0.693$.

a) Obtenez le domaine de définition $\mathbb{D}$. Obtenez aussi la/les racine(s) de f s'il y en a.

Autre façon pour le comportement en $x \to 0$ (sans l'aide):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(x)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(x)/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -2x\ln(x)$$

$$= \lim_{x\to 0} -2\frac{\ln(x)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

Remarque: on pourrait "prolonger" f en la définissant comme:

~~b) Obtenez la dérivée première f'. Obtenez aussi la/les racine(s) de f' s'il y en a.~~

$$f(x) = \begin{cases} x\ln^2(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Le domaine de définition serait alors $D \equiv [0, \infty[$

On aurait alors deux racines: $x = 0$ et $x = 1$

c) Obtenez la dérivée seconde f''. Obtenez aussi la/les racine(s) de f'' s'il y en a.

Question 2: Problème:

Pour votre vaisseau spatial, vous avez conçu un moteur propulseur révolutionnaire qui vous permet d'aller au-delà du système solaire. Ce moteur émet un flux de particules, et par la loi d'action/réaction votre vaisseau spatial est accéléré. Vous devez optimiser ce moteur. En effet, la vitesse "V" des particules émises décroît avec "F" le flux de particules émises par seconde, un effet secondaire appelé "embouteillage". La vitesse maximale des particules (lorsqu'il n'y a pas d'embouteillage) vaut 100 km/s (kilomètres par seconde), une caractéristique de votre moteur. Le facteur de réduction de cette vitesse dû à l'embouteillage est $\exp(-F/F_c)$ où $F_c = 100$ g/s (grammes par seconde) est également une caractéristique de votre moteur. L'accélération "A" de votre vaisseau est donnée par $A = k\,V\,F$ où k est une caractéristique de votre vaisseau qui n'est pas spécifiée dans l'énoncé.

- (1) Quel flux optimal de particules, en grammes par seconde, allez-vous choisir pour obtenir la plus grande accélération? Montrez qu'il s'agit bien d'un maximum. Exprimez cette quantité également en kg/min (kilogrammes par minute).
- (2) Et si le facteur de réduction de la vitesse est $\exp[-(F/F_c)^{1/2}]$, quelle sera le flux optimal de particules, en grammes/seconde ?

(1) F = ...100.. g/s = ...6.. kg/min (2) F = ...400.. g/s

Développement

(1) V est une fonction de F. Soit V, en km/s, et F en g/s :

$$V(F) = V_{\max}.\exp(-F/F_c),$$

où $V_{\max}$ est la vitesse maximale en km/s, soit 100 km/s et F_c vaut 100 g/s.
L'accélération peut donc être exprimée en fonction de F:

$$A(F) = kFV_{\max}.\exp(-F/F_c).$$

La plus grande accélération en fonction de F est déterminée en trouvant d'abord la dérivée de A par rapport à F, et en l'annullant:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dF} =& kV_{\max}.\exp(-F/F_c) + kFV_{\max}.(-1/F_c)\exp(-F/F_c)\\ =& k(1-F/F_c)V_{\max}\exp(-F/F_c).\end{aligned}$$

Cette dérivée ne s'annulle qu'en $F = F_c$. De plus, la dérivée est positive pour $F < F_c$ et négative pour $F > F_c$, ce qui montre que A est maximale.

Donc, $F = F_c = 100$g/s= 6000g/min=6kg/min.

Développement (suite)
(2) Le raisonnement est le même, avec

$$A(F) = kFV_{\max}.\exp[-(F/F_c)^{1/2}].$$

La dérivée vaut

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dF} =& kV_{\max}.\exp[-(F/F_c)^{1/2}] + kFV_{\max}.(-\frac{1}{2}).F^{-1/2}.F_c^{-1/2}\exp[-(F/F_c)^{1/2}]\\ =& k(1-\frac{1}{2}(F/F_c)^{1/2})V_{\max}\exp[(-F/F_c)^{1/2}].\end{aligned}$$

Cette dérivée ne s'annulle que lorsque $1 = \frac{1}{2}(F/F_c)^{1/2}$, soit $F = 4.F_c = 400\text{g/s}$.

Question 3: Primitive:

Obtenez une primitive $g(x) = \int x \ln^2(x)\, dx$.

$g(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\right) + C$

Développement

$$g(x) = \int x \cdot \ln^2(x)\, dx$$

par parties: $u = \ln^2(x) \rightarrow du = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x\, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$= \ln^2(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\ln(x) \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \underbrace{\int x \ln(x)\, dx}$$

par parties: $u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x\, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$= \left(\ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{1}{2}\int x\, dx\right) = \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$\hookrightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4}$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\right)$$

Autre façon, similaire

Question 3: Primitive:

Obtenez une primitive $g(x) = \int x \ln^2(x)\, dx$.

$g(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\right) + C$

Développement

$g(x) = \int x \ln^2(x)\, dx$ par substitution : $u = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^u$

$\hookrightarrow dx = e^u du$

$= \int e^u u^2 e^u du = \int e^{2u} u^2 du$

par parties : $p = u^2 \rightarrow dp = 2u\, du$

$dq = e^{2u} du \rightarrow q = \frac{1}{2} e^{2u}$

$= \frac{u^2}{2} e^{2u} - \int u e^{2u} du$

par parties : $p = u \rightarrow dp = du$

$dq = e^{2u} du \rightarrow q = \frac{1}{2} e^{2u}$

$= \frac{u^2}{2} e^{2u} - \left(\frac{u}{2} e^{2u} - \frac{1}{2}\int e^{2u} du\right)$

$= \frac{u^2}{2} e^{2u} - \left(\frac{u}{2} e^{2u} - \frac{1}{4} e^{2u}\right)$

$= \frac{e^{2u}}{2}\left(u^2 - u + \frac{1}{2}\right)$

car $e^{2u} = (e^u)^2 = x^2$

$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\right)$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN UCLouvain - Examen d'admission **Analyse - Septembre 2025**	NOM: (inutile d'inscrire le prénom et le numéro ici)

Autre façon, un peu hybride

Question 3: Primitive:

Obtenez une primitive $g(x) = \int x \ln^2(x)\, dx$.

$g(x) = \left(\frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\right) + C$

Développement

$$g(x) = \int x \ln^2(x)\, dx = \int (x \ln(x)) \ln(x)\, dx$$

par partie : $u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = x \ln(x) dx$

$\hookrightarrow v = \int x \ln(x) dx = \dots$ à faire par parties

$$= \left(\frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln(x) \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \frac{1}{2}\ln(x)\right) - \frac{1}{2}\underbrace{\int x \ln(x)\, dx}_{= \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{4}\underbrace{\int x\, dx}_{= \frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\left(\ln^2(x) - \frac{1}{2}\ln(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\right)$$

Façon beaucoup plus compliquée et longue

Question 3: Primitive:

Obtenez une primitive $g(x) = \int x \ln^2(x)\, dx$.

$g(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\right) + C$

Développement

$g(x) = \int x \ln^2(x)\, dx$ par parties $\begin{cases} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = \ln^2(x)\, dx \rightarrow v = \int \ln^2(x)\, dx : \text{à faire} \end{cases}$

$v = \int \ln^2(x)\, dx$ par parties $\begin{cases} p = \ln(x) \longrightarrow dp = \frac{1}{x}\, dx \\ q = \ln(x)\, dx \rightarrow q = \int \ln(x)\, dx : \text{à faire} \end{cases}$

$= \dots = x\ln(x) - x$

$= \ln(x)(x\ln(x) - x) - \int (x\ln(x) - x)\frac{1}{x}\, dx$

$= x\ln^2(x) - x\ln(x) - \int \ln(x)\, dx + \int dx$

$= x\ln^2(x) - x\ln(x) - (x\ln(x) - x) + x$

$= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x = x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2)$

$\hookrightarrow \int x\ln^2(x)\, dx = x^2(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) - \int x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2)\, dx$

$\hookrightarrow g(x) = \int x\ln^2(x)\, dx = \frac{x^2}{2}(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + \int x\ln(x)\, dx - \frac{x^2}{2}$

encore à faire

- $\int x\ln(x)\, dx$ par parties $\begin{cases} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = \ln(x)\, dx \rightarrow v = x\ln(x) - x \end{cases}$

$= x(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)\, dx = x^2\ln(x) - x^2 - \int x\ln(x)\, dx + \frac{x^2}{2}$

$\hookrightarrow \int x\ln(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$

$\hookrightarrow g(x) = \int x\ln^2(x)\, dx = \frac{x^2}{2}(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\right)$

Question 4:

Soit $f(x) = \frac{(x^2+x+2)}{(x^3+1)}$. Montrez qu'il existe dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, 2\right[$:

- (1) Un nombre c_1 où la dérivée première de f vaut $-\frac{4}{9}$.
- (2) et (3) Deux nombres distincts, c_2 et c_3, où la dérivée première de f vaut 0.
- (4) Un nombre c_4 où la dérivée seconde de f vaut 0.

Pour cela, utilisez un ou plusieurs théorème(s) bien connu(s) de l'analyse (et nommez-le(s)). Pour le point (4), si vous n'avez pas réussi à faire les points (2) et (3), vous pouvez quand même les considérer comme établis.

Aide: examinez la valeur de f pour d'autres arguments que $-\frac{1}{2}$ ou 2; par exemple certains entiers.

Développement

Dans l'exemple de solution ci-après, on se base sur le théorème des accroissements finis (rappelé à la page suivante). Le théorème s'applique car la fonction $f(x)$ est continue et dérivable sur l'intervalle $]-1/2, 2[$ et sa dérivée première également (ces caractéristiques proviennent du fait que le dénominateur, un polynôme, ne s'annule pas dans cet intervalle, et que le numérateur est également un simple polynôme).

- (1) <u>Un nombre c_1 où la dérivée première de f vaut -4/9.</u>
  On a $f(-1/2) = \frac{1/4-1/2+2}{-(1/8)+1} = \frac{7/4}{7/8} = 2$ et $f(2) = 8/9$. Le théorème des accroissements finis permet de conclure qu'il existe $c_1 \in]-1/2, 2[$ tel que
  $$f'(c_1) = \frac{f(2) - f(-1/2)}{2 - (-1/2)} = \frac{8/9 - 2}{(5/2)} = \frac{-10/9}{(5/2)} = -4/9.$$
- (2) et (3) <u>Deux nombres distincts, c_2 et c_3, où la dérivée première de f vaut 0.</u>
  On a que $f(0) = \frac{2}{1} = 2$, et que $f(1) = \frac{4}{2} = 2$. Et on avait aussi $f(-1/2) = 2$ (voir point (1)). Donc, il existe $c_2 \in]-1/2, 0[$ tel que $f'(c_2) = \frac{f(0)-f(-1/2)}{0-(-1/2)} = \frac{2-2}{1/2} = 0$.
  De même, il existe $c_3 \in]0, 1[$ tel que $f'(c_3) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{2-2}{1} = 0$. De plus, c_2 et c_3 sont bien distincts, puisqu'ils appartiennent à des intervalles disjoints, et ces deux nombres sont inclus dans $]-1/2, 2[$.
- (4) <u>Un nombre c_4 où la dérivée seconde de f vaut 0.</u>
  En appliquant le théorème des accroissements finis sur la fonction dérivée dans l'intervalle $]c_2, c_3[$, on obtient qu'il existe $c_4 \in]c_2, c_3[$ tel que
  $$f''(c_4) = \frac{f'(c_3) - f'(c_2)}{c_3 - c_2} = \frac{0 - 0}{c_3 - c_2} = 0.$$

Développement (suite)

Pour rappel, le théorème des accroissements finis peut s'énoncer:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *Alors il existe au moins un réel* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Pour les points (2), (3) et (4), on aurait pu aussi invoquer le théorème de Rolle.

D'autres méthodes de solutions sont possibles. Par exemple, pour déduire l'existence des nombres c_2 et c_3: calculer la fonction dérivée de $f(x)$, qui a également les propriétés adéquates de continuité et de dérivabilité dans l'intervalle $]-1/2, 2[$, puis trouver ses valeurs en plusieurs points, observer qu'il y a deux changements de signes dans cet intervalle, et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.