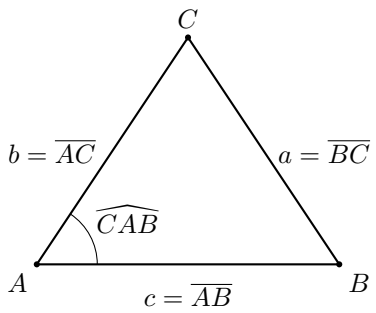
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

UCLouvain - Examen d'admission – Trigonométrie – 29/08/2025

Durée 2h30 – 5 pages – répondre directement dans les cadres – pas de calculette

Notations et conventions

- $\sin^n x$ signifie $(\sin(x))^n$, et de même $\cos^n x = (\cos(x))^n$, etc.
- Les longueurs de segments sont notées avec une barre : $\overline{AB}$ désigne la distance entre les points A et B.
- Un angle comme $\widehat{BAC}$ désigne l'angle formé au point A, entre les segments $[AB]$ et $[AC]$.
- Dans un triangle ABC, les longueurs a, b, c désignent respectivement les côtés opposés aux sommets A, B et C.
- Les angles sont exprimés en radians sauf indication contraire pour indiquer que ce sont des degrés. Par exemple : 15°.



Consignes Générales

- Pas de calculette ni objets connectés.
- L'examen comporte 5 feuilles **recto** sur lesquelles il vous est demandé de répondre à **3 questions**.
- Écrivez votre nom et prénom ainsi que votre numéro d'inscription sur les 5 pages.
- Des feuilles de brouillon vous ont été fournies. L'utilisation de brouillons personnels est interdite.
- Vous pouvez utiliser un crayon mais faites en sorte que vos réponses soient lisibles. Plus généralement, fournissez une copie la plus soignée possible.
- À l'issue de l'épreuve, veuillez ne rendre que les 5 feuilles, **dans l'ordre**. Ne rendez pas de feuille de brouillon !

Question 1 – Questions diverses ($\approx$ 4 points).

Utilisez les feuilles de brouillon pour établir les réponses finales à ces 4 questions et écrivez **uniquement ces réponses finales dans les cadres**.

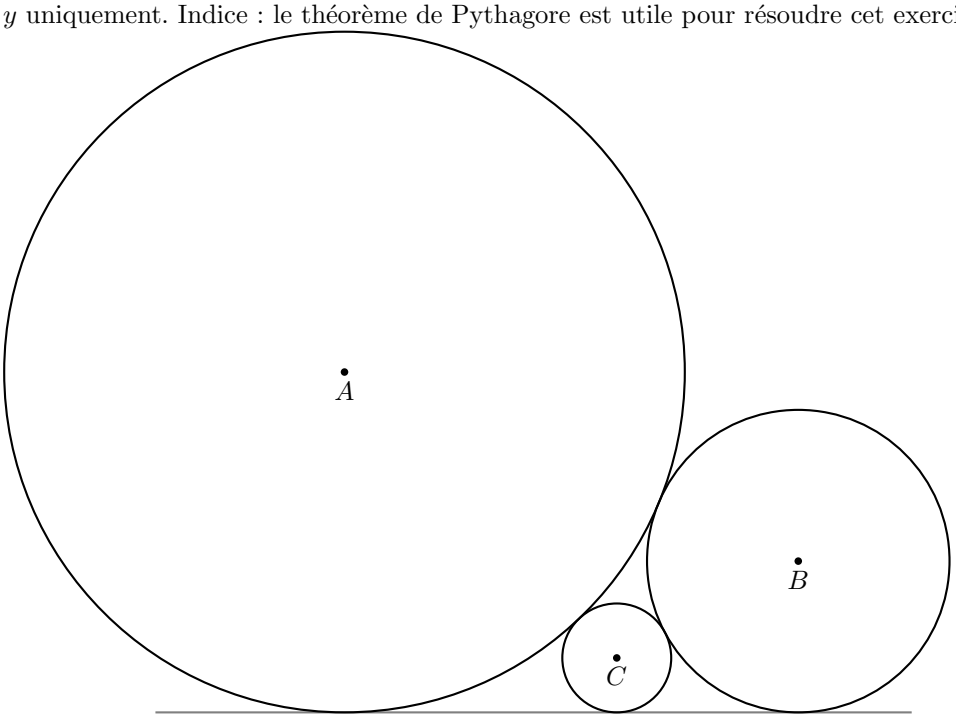
1a Développez l'expression $\sin 3x$ sous la forme d'un polynôme en $\sin x$ uniquement.

$$\sin 3x = \boxed{3\sin x - 4\sin^3 x}$$

1b Simplifier l'expression suivante pour qu'elle ne fasse plus apparaître de fonctions trigonométriques :

$$\cos(\arcsin(x)) = \boxed{\sqrt{1-x^2}}$$

1c Trois cercles A, B, C, de rayons respectifs x, y et z, sont chacun tangents à une même droite horizontale ainsi que deux à deux entre eux, comme illustré. Déterminez une formule exprimant z en fonction de x et y uniquement. Indice : le théorème de Pythagore est utile pour résoudre cet exercice.



$$z = \boxed{\frac{xy}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}}$$

1d Déterminez la valeur exacte, sous forme de fraction irréductible, de l'expression suivante

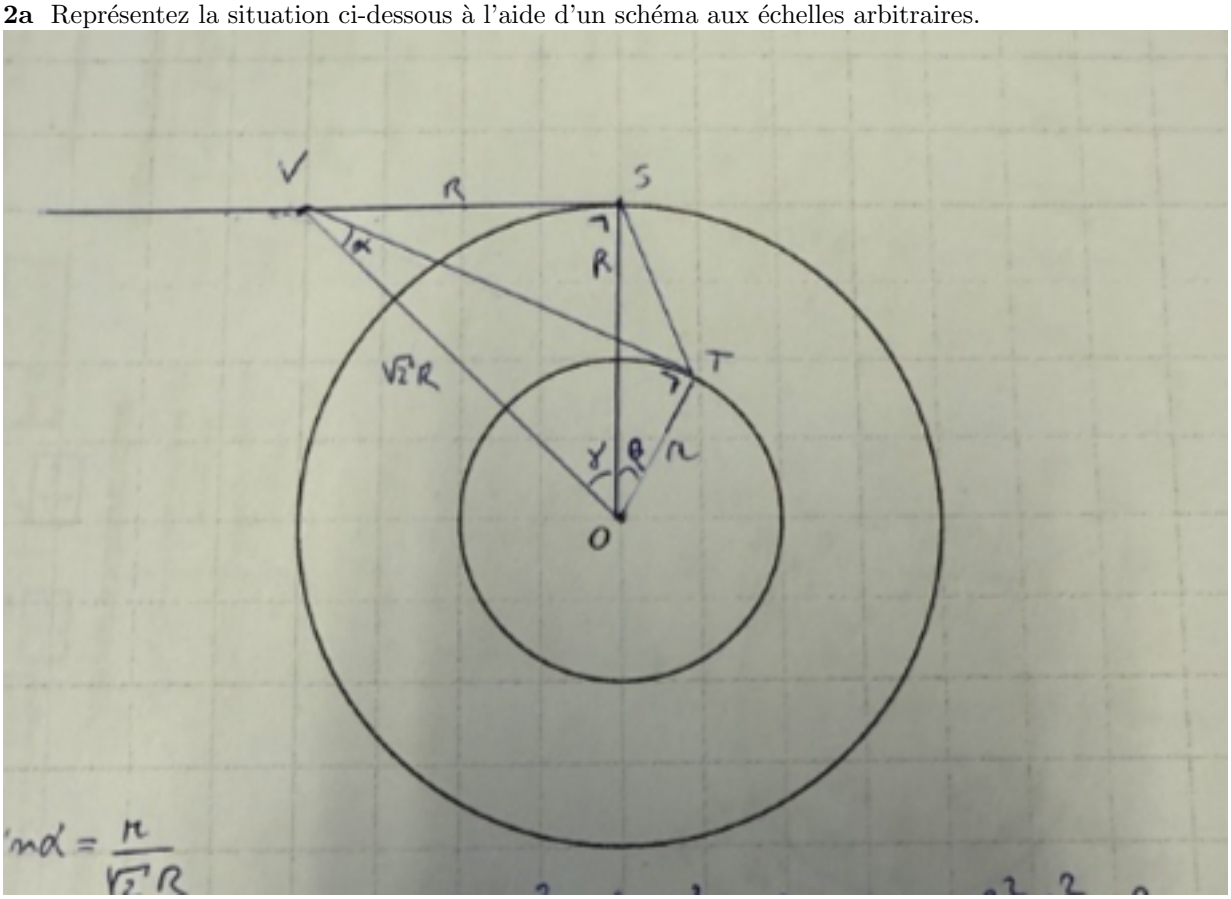
$$\cos 465^\circ + \cos 165^\circ = \boxed{-\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

Question 2 – Espace (≈ 7 points)

Un satellite S et une station spatiale T sont en orbite circulaire autour de la Terre, dans un même plan, mais à des altitudes différentes. Le centre de la Terre est le point O. Le satellite S se trouve sur un cercle centré en O de rayon R, et la station T sur un cercle centré en O de rayon r avec $r < R$. Un vaisseau spatial V est situé en un point de l'espace tel que

1. les segments $[VS]$ et $[VT]$ sont tangents respectivement aux cercles de centre O passant par S et T et
2. $\overline{OS} = \overline{SV}$.

2a Représentez la situation ci-dessous à l'aide d'un schéma aux échelles arbitraires.



2b Déterminez une formule qui exprime l'angle $\alpha = \widehat{TVO}$ en fonction de r et R uniquement.

1) Expression de α en fonction de r et R Comme VS est tangent au cercle de centre O et de rayon R en S, on a $OS \perp VS$. La condition supplémentaire $\overline{OS} = \overline{SV} = R$ implique que le triangle OSV est un triangle rectangle isocèle en S. Ainsi, sa diagonale vaut

$$\overline{OV} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}.$$

Considérons maintenant le triangle VOT. Puisque VT est tangent au cercle de centre O et de rayon r, on a $OT \perp VT$. Donc VOT est un triangle rectangle en T. On note $\alpha = \widehat{TVO}$. Dans ce triangle rectangle, l'hypoténuse est $\overline{OV} = R\sqrt{2}$ et le côté opposé à l'angle α est $\overline{OT} = r$. On obtient

$$\sin\alpha = \frac{r}{R\sqrt{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{r}{R\sqrt{2}}\right)}.$$

$\alpha =$

2c En supposant α connu, donnez une formule qui exprime la distance $\overline{ST}$ en fonction de R, r et α.

Méthode 1) – dans le triangle TOS

$\overline{ST}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\beta)$.

Dans le triangle rectangle isocèle OSV : $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Dans le triangle rectangle OTV : $\beta + \gamma + \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Dans le triangle rectangle $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$.

$\overline{ST} = \boxed{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\pi/4 - \alpha)}}$

Notez que $\cos(\pi/4 - \arcsin(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}+x}{2}$ et que si $x = \frac{r}{\sqrt{2}R}$, $\cos(\pi/4 - \arcsin(x)) = \frac{r+\sqrt{2R^2-r^2}}{2R}$ et

$$\overline{ST} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\frac{r + \sqrt{2R^2 - r^2}}{2R}} = \sqrt{R^2 - r\sqrt{2R^2 - r^2}}$$

Méthode 2 – dans le triangle TVS

Dans le triangle rectangle isocèle SVO : $\widehat{SVO} = \frac{\pi}{4}$.

Dans le triangle SVT : $\widehat{SVT} = \frac{\pi}{4} - \alpha$.

Dans le triangle rectangle OTV : $\overline{TV}^2 = 2R^2 - r^2$.

$\overline{ST} = \boxed{\sqrt{3R^2 - r^2 - 2R\sqrt{2R^2 - r^2}\cos(\pi/4 - \alpha)}}$

Notez que $\cos(\pi/4 - \arcsin(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}+x}{2}$ et que si $x = \frac{r}{\sqrt{2}R}$, $\cos(\pi/4 - \arcsin(x)) = \frac{r+\sqrt{2R^2-r^2}}{2R}$ et

$$\overline{ST} = \sqrt{3R^2 - r^2 - 2R\sqrt{2R^2 - r^2}\frac{r + \sqrt{2R^2 - r^2}}{2R}} = \sqrt{R^2 - r\sqrt{2R^2 - r^2}}$$

Notez que la question **2c** *peut être résolue sans avoir trouvé* **2b**, *α étant supposé connu.*

Question 3 – Équation trigonométrique (≈ 9 points)

Trouvez toutes les solutions réelles de l'équation trigonométrique suivante

$$\sin 3x - 4\sin x + \tan x = 0$$

Conditions d'existence : On doit s'asurer que $\tan x$ existe et donc que $\cos x \neq 0$. Les conditions nous donnent $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Méthode 1 :
On applique la factorisation de Simpson sur $\sin(3x) - \sin x$ ce qui donne

$$2\cos(2x)\sin x - 3\sin x + \tan x = 0.$$

On utilise la définition de la tangente pour transformer l'équation en

$$2\cos(2x)\sin x - 3\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

En mettant tout au même dénominateur, on obtient

$$\frac{2\cos x\cos(2x)\sin x - 3\cos x\sin x + \sin x}{\cos x} = 0$$

Le cosinus du dénominateur peut être simplifié puisque nous avons déjà posé les conditions d'existence. On peut également mettre $\sin x$ en évidence. On obtient

$$\sin x(2\cos x\cos(2x) - 3\cos x + 1) = 0$$

Le premier facteur nous donne les solutions de $\sin x = 0$ c'est-à-dire $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ qui satisfont les conditions d'existence.

Pour le deuxième facteur, on utilise l'expression $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et on obtient

$$2(2\cos^2(x) - 1)\cos x - 3\cos x + 1 = 0.$$

En notant $y = \cos x$, on obtient le polynôme $(4y^2 - 2)y - 3y + 1 = 4y^3 - 5y + 1$. On observe que $y = 1$ est solution, nous pouvons donc factoriser le polynôme et obtenir

$$(y-1)(4y^2 + 4y - 1) = 0.$$

Le premier facteur donne $y = 1$ soit $\cos x = 1$ ce qui correspond déjà aux solutions trouvées de $\sin x = 0$. Cela ne génère donc aucune nouvelle solution. Le deuxième facteur est un polynôme d'ordre 2. Son discriminant est 32. Les solutions sont donc $y = \frac{-4\pm\sqrt{32}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$. On observe que $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} < -1$ et ne peut donc générer une solution. Par contre, l'autre racine du polynôme nous donne $\cos x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire $x = \arccos(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}) + 2k\pi$ ou $x = -\arccos(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}) + 2k\pi$.
L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\arccos(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Méthode 2 :

On utilise $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3(x)$. En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$3\sin x - 4\sin^3 x - 4\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$
$$\frac{3\sin x\cos x - 4\sin x\sin^2 x\cos x - 4\sin x\cos x + \sin x}{\cos x} = 0$$

Le cosinus du dénominateur peut être simplifié puisque nous avons déjà posé les conditions d'existence. On peut également mettre $\sin x$ en évidence. On obtient

$$\sin x(3\cos x - 4\sin^2 x\cos x - 4\cos x + 1) = 0$$

Le premier facteur nous donne les solutions de $\sin x = 0$ c'est-à-dire $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ qui satisfont les conditions d'existence.

Pour le deuxième facteur, on utilise l'expression $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et on obtient

$$-\cos x - 4(1 - \cos^2 x)\cos x + 1 = 0$$
$$4\cos^3 - 5\cos x + 1 = 0.$$

En notant $y = \cos x$, on obtient le polynôme $4y^3 - 5y + 1$. On observe que $y = 1$ est solution, nous pouvons donc factoriser le polynôme et obtenir

$$(y-1)(4y^2 + 4y - 1) = 0.$$

Le premier facteur donne $y = 1$ soit $\cos x = 1$ ce qui correspond déjà aux solutions trouvées de $\sin x = 0$. Cela ne génère donc aucune nouvelle solution. Le deuxième facteur est un polynôme d'ordre 2. Son discriminant est 32. Les solutions sont donc $y = \frac{-4\pm\sqrt{32}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$. On observe que $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} < -1$ et ne peut donc générer une solution. Par contre, l'autre racine du polynôme nous donne $\cos x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire $x = \arccos(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}) + 2k\pi$ ou $x = -\arccos(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}) + 2k\pi$.
L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\arccos(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.